

HARTE FAKTEN ZU RUNGES PHÄNOMEN

ANDREAS U. SCHMIDT AND CLAUDE

ZUSAMMENFASSUNG. Wir geben eine in sich geschlossene Darstellung des Runge-Phänomens in der Polynominterpolation. Ausgehend von Runges Originalbeobachtung (1901) werden Bernsteins Divergenzsatz, Fabers Theorem, die Rolle der Lebesgue-Konstante im funktionalanalytischen Rahmen und die Konvergenzanalyse über Bernstein-Ellipsen entwickelt. Die Optimalität der Tschebyschow-Stützstellen wird potentialtheoretisch begründet. Abschließend untersuchen wir das Phänomen in L^p -Normen: Während bei äquidistanten Stützstellen die Divergenz in allen L^p -Normen persistiert, ergibt sich bei optimaler Stützstellenwahl eine echte Hierarchie mit dem Satz von Erdős–Turán (L^2 -Konvergenz) und Nevais Schwelle bei $p = 4$.

1. EINLEITUNG

In der numerischen Mathematik bezeichnet *Runges Phänomen* das überraschende Verhalten, dass Polynominterpolation an äquidistanten Stützstellen¹ bei steigendem Polynomgrad nicht notwendig gegen die interpolierte Funktion konvergiert, sondern insbesondere an den Intervallrändern zunehmend starke Oszillationen aufweisen kann. Dieses Verhalten steht in einem bemerkenswerten Spannungsverhältnis zum Approximationssatz von Weierstraß, der die Existenz gleichmäßig konvergenter Polynomfolgen für jede stetige Funktion garantiert – allerdings ohne zu fordern, dass diese Polynome durch Interpolation an festen Stützstellenschemata gewonnen werden.

2. RUNGES ORIGINALERGEBNIS (1901)

Carl David Tolmé Runge untersuchte in seiner Arbeit von 1901 [1] das Verhalten der Lagrange-Interpolationspolynome $P_n(x)$ an äquidistanten Stützstellen $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \dots, n$, für die Funktion

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

Date: 4. März 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. 41A05, 41A10, 65D05.

Key words and phrases. Polynominterpolation, Runge-Phänomen, Lebesgue-Konstante, Bernstein-Ellipse, Tschebyschow-Polynome, L^p -Konvergenz.

¹In der älteren deutschsprachigen Literatur sowie in Übersetzungen aus dem Englischen (*nodes*) werden die Interpolationspunkte häufig als *Knoten* bezeichnet. Im heutigen deutschen Sprachgebrauch hat sich der Begriff *Stützstellen* als Standardbezeichnung durchgesetzt; wir verwenden ihn durchgängig in diesem Artikel.

eine skalierte Form der *Versiera di Agnesi*², auf dem Intervall $[-1, 1]$. Runge stellte fest, dass die Interpolationspolynome in der Nähe der Intervallenden $x = \pm 1$ zunehmend starke Oszillationen zeigen und der maximale Interpolationsfehler unbeschränkt wächst:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty.$$

Die Beweisführung in Runges Originalarbeit beruhte zunächst auf einer Kombination empirischer Beobachtungen und analytischer Argumente über das Wachstumsverhalten der Ableitungen und des Stützstellenprodukts.

3. DIE FEHLERABSCHÄTZUNG UND IHRE GRENZEN

Für eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f lautet die klassische Fehlerdarstellung der Polynominterpolation an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$:

$$(3) \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

für ein geeignetes ξ zwischen dem Minimum und Maximum der Stützstellen und x . Hieraus folgt die Abschätzung

$$(4) \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Für die Runge-Funktion (1) wachsen sowohl die $(n+1)$ -ten Ableitungen als auch – bei äquidistanten Stützstellen – das Stützstellenprodukt schnell genug, dass die obere Schranke (4) gegen Unendlich strebt. Es ist allerdings zu bemerken, dass das Divergieren der *Schranke* allein noch nicht die Divergenz des Fehlers selbst impliziert; der eigentliche Beweis der Divergenz erfordert zusätzliche Argumente.

4. BERNSTEINS DIVERGENZSATZ (1918)

Einen fundamentalen und rigorosen Beitrag lieferte Sergei N. Bernstein im Jahr 1918 [2]. Er bewies, dass für die Funktion $f(x) = |x|$ die Lagrange-Interpolationspolynome an äquidistanten Stützstellen in $[-1, 1]$ an *jedem* Punkt x mit $0 < |x| < 1$ divergieren. Die Konvergenz gilt lediglich bei $x = 0$ (aus Symmetriegründen) und an den Endpunkten $x = \pm 1$ (wo die Interpolationsbedingung die Übereinstimmung erzwingt).

Dieses Ergebnis ist besonders bemerkenswert, da $|x|$ auf $[-1, 1]$ stetig, ja sogar Lipschitz-stetig ist – die Divergenz wird also nicht durch eine

²Die *Versiera di Agnesi* (ital. *la versiera*) ist eine von Maria Gaetana Agnesi 1748 in ihren *Istituzioni analitiche* untersuchte Kurve mit der Gleichung $y = a^3/(a^2 + x^2)$. Die im Englischen gebräuchliche Bezeichnung *Witch of Agnesi* geht auf eine Fehlübersetzung des italienischen *versiera* (von lat. *vertere*, drehen) zurück, das mit *avversiera* (Teufelin, Hexe) verwechselt wurde. Die Runge-Funktion (1) entsteht durch die Parameterwahl $a = 1/5$ und geeignete Skalierung.

Singularität auf dem reellen Intervall verursacht, sondern durch den Mangel an Analytizität bei $x = 0$.

Byrne, Mills und Smith [3] lieferten 1990 eine quantitative Version von Bernsteins Ergebnis, in der die exakte Divergenzrate bestimmt wird. Spätere Verallgemeinerungen von Lu Zhikang und Xia Mao [4] zeigten, dass die Divergenz auch für die Funktionenfamilie $|x|^\alpha$ mit geeigneten $\alpha > 0$ an allen inneren Punkten (außer $x = 0$) bestehen bleibt.

5. FABERS THEOREM (1914)

Einen strukturell noch tieferliegenden Satz bewies Georg Faber bereits 1914: Zu *jedem* vorgegebenen System von Interpolationsstützstellen existiert eine stetige Funktion $f \in C([a, b])$, für die die zugehörige Folge der Interpolationspolynome divergiert [5]. Dieses Resultat zeigt, dass die Schwierigkeit nicht allein in der Wahl äquidistanter Stützstellen liegt, sondern eine grundsätzliche Limitierung der Polynominterpolation an festen Stützstellenschemata darstellt.

6. DIE ROLLE DER LEBESGUE-KONSTANTE

Der Zusammenhang zwischen Stützstellenwahl und Interpolationsgüte lässt sich im Rahmen der Funktionalanalysis präzise fassen. Wir betrachten den Banachraum $C([-1, 1])$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[-1, 1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$(5) \quad \|f\|_\infty := \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

sowie den $(n+1)$ -dimensionalen Teilraum $\Pi_n \subset C([-1, 1])$ der Polynome vom Grad höchstens n . Zu einem gegebenen System von $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$ definiert die Lagrange-Interpolation einen linearen Operator

$$(6) \quad X_n : C([-1, 1]) \rightarrow \Pi_n \subset C([-1, 1]), \quad f \mapsto P_n,$$

wobei P_n das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom mit $P_n(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$ ist. Da X_n auf Π_n die Identität ist, handelt es sich um eine *Projektion* ($X_n^2 = X_n$). Die Operatornorm dieses Projektors bezüglich der Supremumsnorm heißt *Lebesgue-Konstante*:

$$(7) \quad \Lambda_n := \|X_n\|_{\mathcal{L}(C([-1, 1]))} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|X_n f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |l_i(x)|,$$

wobei $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ die Lagrange-Basispolynome sind. Die letzte Gleichheit in (7) folgt daraus, dass $X_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$ gilt und das Supremum über die Einheitskugel gerade die Summe der Absolutbeträge der Basispolynome liefert.

Der *Bestapproximationsfehler* $E_n(f)$ misst, wie gut f durch Polynome aus Π_n überhaupt approximiert werden kann:

$$(8) \quad E_n(f) := \inf_{p \in \Pi_n} \|f - p\|_\infty.$$

Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gilt $E_n(f) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jedes $f \in C([-1, 1])$. Die *Lebesgue-Ungleichung* verbindet nun den Interpolationsfehler mit dem Bestapproximationsfehler:

$$(9) \quad \|f - X_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot E_n(f).$$

Sie folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung: Für jedes $p \in \Pi_n$ gilt $\|f - X_n f\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|X_n(f - p)\|_\infty \leq (1 + \|X_n\|) \cdot \|f - p\|_\infty$, und die Infimumbildung über p liefert die Behauptung (9).

Für äquidistante Stützstellen zeigten Turetskii [6] und Schönhage [7], dass die Lebesgue-Konstante exponentiell wächst:

$$(10) \quad \Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \ln n}.$$

Dieses exponentielle Wachstum bildet den analytischen Kern des Runge-Phänomens: Selbst wenn der Bestapproximationsfehler $E_n(f)$ rasch gegen Null konvergiert, kann der Faktor $(1 + \Lambda_n)$ in (9) den Fehler der Interpolation über alle Grenzen treiben.

Der Satz von Banach–Steinhaus (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) liefert darüber hinaus einen eleganten funktionalanalytischen Zugang: Die Operatorfolge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besteht aus beschränkten linearen Operatoren auf dem Banachraum $C([-1, 1])$. Da die Operatornormen $\Lambda_n = \|X_n\|$ unbeschränkt sind, muss es nach Banach–Steinhaus eine in $C([-1, 1])$ dichte G_δ -Menge von Funktionen geben, für die $\|X_n f\|_\infty \rightarrow \infty$ gilt – was Fabers Theorem auf abstraktem Wege reproduziert und sogar verschärft, da die Menge der „pathologischen“ Funktionen als G_δ -Menge im Sinne von Baire generisch ist.

7. KONVERGENZREGION UND BERNSTEIN-ELLIPSE

Für analytische Funktionen lässt sich die Konvergenzfrage mit Methoden der komplexen Analysis präzise behandeln. Der Schlüssel liegt in der Beobachtung, dass die Singularitäten einer Funktion in der *komplexen* Ebene das Konvergenzverhalten der Interpolation auf der *reellen* Achse bestimmen.

7.1. Fehlerdarstellung über die komplexe Analysis. Sei f holomorph in einer offenen Umgebung der Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und des Auswertungspunkts x , und sei Γ eine einfach geschlossene Kurve, die all diese Punkte im Inneren enthält und auf deren Abschluss f holomorph ist. Dann lässt sich der Interpolationsfehler als Konturintegral darstellen:

$$(11) \quad f(x) - P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(z)} \cdot \frac{f(z)}{z - x} dz,$$

wobei $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ das Stützstellenprodukt ist. Diese Darstellung folgt unmittelbar aus der Cauchy-Integralformel für dividierte Differenzen:

$$(12) \quad f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{\omega_{n+1}(z)(z-x)} dz,$$

kombiniert mit der Newton-Fehlerformel

$$f(x) - P_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot f[x_0, \dots, x_n, x].$$

Besitzt f isolierte Singularitäten, zum Beispiel Pole bei einer rationalen Funktion, so kann der Integrationsweg Γ durch die Singularitäten „hindurchgezogen“ werden, und das asymptotische Verhalten wird durch die Residuenbeiträge der nächstgelegenen Singularitäten bestimmt. Die Konvergenz der Interpolation an einem Punkt $x \in [-1, 1]$ hängt dann vom Verhältnis $|\omega_{n+1}(x)|/|\omega_{n+1}(z_0)|$ ab, wobei z_0 die dominante Singularität ist: Konvergenz tritt ein, wenn dieses Verhältnis für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht, Divergenz im umgekehrten Fall.

7.2. Eppersons Analyse der Runge-Funktion. Die Funktion $f(z) = 1/(1 + 25z^2)$ besitzt Pole erster Ordnung bei $z_0 = \pm i/5$. Epperson [9] nutzte die Fehlerdarstellung über dividierte Differenzen in der Newton-Interpolationsform und bestimmte das asymptotische Verhalten beider Faktoren – des Stützstellenprodukts $\omega_{n+1}(x)$ und der dividierten Differenzen $f[x_0, \dots, x_n, x]$ – für äquidistante Stützstellen $x_k = -1 + 2k/n$ auf $[-1, 1]$.

Der entscheidende Schritt ist die Auswertung des *logarithmischen Potentials* der empirischen Stützstellenverteilung. Für äquidistante Stützstellen konvergiert das normierte Zählmaß $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \delta_{x_k}$ schwach gegen die gleichförmige Verteilung $\mu_{\text{eq}} = \frac{1}{2} dt$ auf $[-1, 1]$. Das logarithmische Potential bestimmt die Wachstumsrate des Stützstellenprodukts:

$$(13) \quad \frac{1}{n} \ln |\omega_{n+1}(x)| \longrightarrow \int_{-1}^1 \ln |x-t| d\mu_{\text{eq}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |x-t| dt =: \Phi_{\text{eq}}(x).$$

Die Konvergenz der Interpolation an einem Punkt $x \in [-1, 1]$ wird nun durch den Vergleich von $\Phi_{\text{eq}}(x)$ mit $\Phi_{\text{eq}}(z_0)$ entschieden, wobei $z_0 = i/5$ der nächste Pol ist. Es gilt Konvergenz für

$$(14) \quad \Phi_{\text{eq}}(x) < \text{Re } \Phi_{\text{eq}}(z_0),$$

denn dann wächst $|\omega_{n+1}(x)|$ asymptotisch langsamer als $|\omega_{n+1}(z_0)|$, und der Quotient in (11) geht gegen Null. Die Grenze zwischen Konvergenz- und Divergenzgebiet liegt bei

$$(15) \quad \Phi_{\text{eq}}(x) = \text{Re } \Phi_{\text{eq}}(z_0),$$

was für die Standard-Runge-Funktion (1) auf den numerischen Wert $|x| \approx 0,726$ führt. Eppersons Analyse zeigt darüber hinaus, dass die Konvergenzgrenze $\alpha(c)$ vom Parameter c in der verallgemeinerten Runge-Funktion $f(x) = 1/(1 + cx^2)$ abhängt: Je größer c , desto näher liegen die Pole an der reellen Achse und desto kleiner wird die Konvergenzregion. Isaacson und Keller [8] hatten dieses Ergebnis bereits früher auf anderem Wege erhalten.

7.3. Die Bernstein-Ellipse. Den allgemeinen Rahmen für die Konvergenzanalyse bei analytischen Funktionen liefert die *Bernstein-Ellipse*. Die Joukowski-Abbildung

$$(16) \quad z = J(w) := \frac{1}{2} (w + w^{-1})$$

bildet den Kreis $|w| = \rho > 1$ in der w -Ebene auf eine Ellipse $\mathcal{E}_\rho$ in der z -Ebene ab, deren Brennpunkte bei ± 1 liegen und deren Halbachsen

$$(17) \quad a = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2}, \quad b = \frac{\rho - \rho^{-1}}{2}$$

betragen. Der Parameter ρ ist die *Halbachsensumme*: $\rho = a + b$. Die Bernstein-Ellipse $\mathcal{E}_\rho$ umfasst das Intervall $[-1, 1]$ (das dem Grenzfall $\rho = 1$ entspricht) und wird mit wachsendem ρ größer.

Sei nun f auf $[-1, 1]$ stetig und holomorph fortsetzbar ins Innere von $\mathcal{E}_\rho$ für ein $\rho > 1$. Bezeichne ρ^* die *größte* solche Zahl – also den Radius der maximalen Bernstein-Ellipse, in deren Innerem f holomorph ist. Dann gilt für den Bestapproximationsfehler (8) der folgende

Satz 7.1 (Bernstein). *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$(18) \quad E_n(f) \leq \frac{2M}{\rho^{*n}(\rho^* - 1)},$$

wobei $M = \max_{z \in \mathcal{E}_{\rho^*}} |f(z)|$.

Insbesondere konvergiert $E_n(f)$ mit geometrischer Rate $O(\rho^{*-n})$. Der Parameter ρ^* wird also vollständig durch die Lage der nächsten Singularität bestimmt.

Anwendung auf die Runge-Funktion. Die Pole von $f(z) = 1/(1 + 25z^2)$ bei $z = \pm i/5$ liegen auf der imaginären Achse. Die größte Bernstein-Ellipse, die diese Pole nicht enthält, berührt sie gerade auf der kleinen Halbachse: Aus $b = 1/5$, also $(\rho^* - \rho^{*-1})/2 = 1/5$, folgt die quadratische Gleichung $\rho^{*2} - \frac{2}{5}\rho^* - 1 = 0$ mit der Lösung

$$(19) \quad \rho^* = \frac{1 + \sqrt{26}}{5} \approx 1,220.$$

Dieser Wert ist relativ nahe bei 1, was die langsame Konvergenz selbst unter optimaler Stützstellenwahl erklärt: Der Bestapproximationsfehler fällt nur wie $O(1,22^{-n})$. Zum Vergleich: Für $f(z) = 1/(1 + z^2)$ (Pole bei $\pm i$) ergibt sich $\rho^* = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$, und die Konvergenz ist dramatisch schneller.

8. TSCHEBYSCHOW-POLYNOME UND OPTIMALE STÜTZSTELLENWAHL

Definition 8.1. Die *Tschebyschow-Polynome erster Art* $T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sind für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$(20) \quad T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Obwohl diese Definition über trigonometrische Funktionen erfolgt, sind die T_n tatsächlich Polynome vom Grad n in x : Aus der trigonometrischen Identität $\cos(n\theta) = 2 \cos \theta \cdot \cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta)$ folgt die *Dreiterm-Rekursion*

$$(21) \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Daraus ergeben sich die ersten Polynome als $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, und allgemein hat T_n den Leitkoeffizienten 2^{n-1} für $n \geq 1$. Die n Nullstellen von T_n liegen sämtlich im offenen Intervall $(-1, 1)$:

$$(22) \quad x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Nullstellen heißen die *Tschebyschow-Stützstellen* (erster Art) der Ordnung n . Aus der Definitionsgleichung (20) folgt unmittelbar $\|T_n\|_\infty = 1$, und die Extrema ± 1 werden an den $n+1$ Punkten $\bar{x}_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \dots, n$, angenommen – den *Tschebyschow-Stützstellen zweiter Art* (auch: Tschebyschow-Lobatto-Punkte oder Extremalstützstellen von T_n).

8.1. Optimalität der Tschebyschow-Stützstellen. Die Überlegenheit der Tschebyschow-Stützstellen (22) hat mehrere ineinandergreifende Ursachen, die sich alle auf ein und dasselbe potentialtheoretische Prinzip zurückführen lassen.

Minimales Stützstellenprodukt. Die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{n+1} sind genau die Tschebyschow-Stützstellen, und das zugehörige normierte (monische) Polynom $\tilde{T}_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$ erfüllt die *Minimax-Eigenschaft*:

$$(23) \quad \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n} = \min_{\substack{p \text{ monisch,} \\ \deg p = n+1}} \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

Kein anderes System von $n+1$ Stützstellen liefert ein Stützstellenprodukt ω_{n+1} mit kleinerem Supremum auf $[-1, 1]$.

Gleichgewichtsverteilung und konstantes Potential. Das normierte Zählmaß der Tschebyschow-Stützstellen konvergiert schwach gegen das *Gleichgewichtsmaß* (Arkussinus-Verteilung) des Intervalls $[-1, 1]$:

$$(24) \quad d\mu_{\text{Tsch}}(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Dies ist die eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $[-1, 1]$, die die logarithmische Energie $\iint \ln |s-t|^{-1} d\mu(s) d\mu(t)$ minimiert. Ihre entscheidende Eigenschaft ist, dass das zugehörige logarithmische Potential *auf dem gesamten Intervall* $[-1, 1]$ konstant ist:

$$(25) \quad \int_{-1}^1 \ln |x-t| d\mu_{\text{Tsch}}(t) = -\ln 2 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

Folglich wächst das Stützstellenprodukt der Tschebyschow-Stützstellen mit der gleichförmigen Rate $|\omega_{n+1}(x)|^{1/n} \rightarrow 1/2$ für alle $x \in [-1, 1]$ – im Gegensatz zu äquidistanten Stützstellen, bei denen $|\omega_{n+1}(x)|^{1/n} \rightarrow e^{\Phi_{\text{eq}}(x)}$ ortsabhängig variiert und an den Intervallrändern stark anwächst (vgl. (13)).

Folgerung für die Konvergenz. Für Tschebyschow-Stützstellen und eine Funktion f mit Analytizitätsparameter $\rho^* > 1$ liefert die Kombination aus Lebesgue-Ungleichung (9) und Bernsteins Approximationssatz (18):

$$(26) \quad \|f - P_n^{\text{Tsch}}\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n^{\text{Tsch}}) \cdot E_n(f) = O(\ln n) \cdot O(\rho^{*-n}) = O(\rho^{*-n}),$$

da der logarithmische Faktor $(1 + \Lambda_n^{\text{Tsch}}) = O(\ln n)$ vom exponentiellen Abfall ρ^{*-n} dominiert wird. Die Interpolation konvergiert somit auf dem *gesamten* Intervall $[-1, 1]$ mit nahezu optimaler geometrischer Rate. Im Gegensatz dazu zerstört das exponentielle Wachstum (10) bei äquidistanten Stützstellen die Konvergenz außerhalb der durch Φ_{eq} (vgl. (14)) bestimmten Region.

Trefethen und Weideman [10] gaben 1991 mittels der Newton-Interpolationsformel elegante Beweise für präzise Konvergenz- und Divergenzschwellen in Abhängigkeit von der Analytizitätsregion der Funktion und arbeiteten die Rolle der Bernstein-Ellipse als vereinheitlichendes Konzept systematisch heraus.

9. BEMERKUNG ZUR SKALENINVARIANZ

Die konventionelle Formulierung auf dem Intervall $[-1, 1]$ kann den Eindruck erwecken, die Intervalllänge spiele eine eigenständige Rolle: Das Stützstellenprodukt $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ skaliert bei einer affinen Transformation $x \mapsto \alpha x$ mit α^{n+1} und fällt für kurze Intervalle exponentiell ab. Da weder Polynome noch stetige Funktionen eine intrinsische Längenskala besitzen, wäre eine tatsächliche Skalenabhängigkeit der Theorie widersprüchlich.

Die Auflösung liegt darin, dass das Stützstellenprodukt in der Interpolationstheorie *nie isoliert* auftritt, sondern stets von kompensierenden Faktoren begleitet wird, die exakt dieselbe Skalierung tragen:

In der Fehlerformel (3) transformiert sich bei der affinen Abbildung $t \mapsto a + (b - a)t$ von $[0, 1]$ auf $[a, b]$ sowohl ω_{n+1} als auch die $(n + 1)$ -te Ableitung mit dem Faktor $(b - a)^{n+1}$, jedoch in gegenläufiger Richtung: $\omega_{n+1}(x) = (b - a)^{n+1} \tilde{\omega}_{n+1}(t)$, während $f^{(n+1)}(\xi) = (b - a)^{-(n+1)} g^{(n+1)}(\tau)$ für die transformierte Funktion $g(t) = f(a + (b - a)t)$ gilt. Im Produkt kürzt sich der Skalierungsfaktor exakt heraus.

In der Konturintegral-Darstellung (11) tritt der *Quotient* $\omega_{n+1}(x)/\omega_{n+1}(z)$ auf, in dem sich die Skalierung gleichfalls aufhebt. Und die Lagrange-Basispolynome $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, deren Absolutbeträge die Lebesgue-Konstante (7) definieren, sind als Quotienten gleichartig skalierender Terme ohnehin dimensionslos.

Sämtliche Aussagen dieses Artikels – Konvergenzregion, Bernstein-Ellipsen-Parameter ρ^* , Lebesgue-Konstante, Bestapproximationsfehler – sind daher

invariant unter der affinen Abbildung $x \mapsto \frac{2x-(a+b)}{b-a}$, die ein beliebiges Intervall $[a, b]$ auf $[-1, 1]$ transformiert. Die Beschränkung auf $[-1, 1]$ ist reine Normierungskonvention.

10. POSITIVE GEGENRESULTATE

Die negative Botschaft des Runge-Phänomens wird durch mehrere positive Ergebnisse relativiert:

Erstens garantiert der Approximationssatz von Weierstraß die Existenz gleichmäßig konvergenter Polynomfolgen für jede stetige Funktion – wobei der konstruktive Beweis über *Bernstein-Polynome* ein explizites, wenn auch in der Praxis langsam konvergierendes Verfahren liefert.

Zweitens konvergiert die Interpolation an *Tschebyschow-Stützstellen* gleichmäßig für jede absolut stetige Funktion auf $[-1, 1]$, da die zugehörige Lebesgue-Konstante nur logarithmisch wächst: $\Lambda_n^{\text{Tsch}} = O(\ln n)$ (vgl. (26)).

Drittens lässt sich das Problem durch *Spline-Interpolation* umgehen, bei der stückweise Polynome niedrigen Grades verwendet werden und die Approximationsgüte durch Verfeinerung der Zerlegung statt durch Erhöhung des Polynomgrades verbessert wird.

11. RUNGES PHÄNOMEN IN L^p -NORMEN

Die bisherige Darstellung misst den Interpolationsfehler ausschließlich in der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ (5). In der Approximationstheorie und in Anwendungen – etwa bei der numerischen Quadratur oder der Finite-Elemente-Methode – sind jedoch häufig *integrale* Fehlermaße relevant. Es liegt daher nahe zu fragen, ob der Übergang von der gleichmäßigen Norm zu einer L^p -Norm das Runge-Phänomen abschwächt oder gar beseitigt.

11.1. L^p -Normen auf $[-1, 1]$. Für $1 \leq p < \infty$ und eine auf $[-1, 1]$ messbare Funktion g ist die L^p -Norm definiert als

$$(27) \quad \|g\|_p := \left(\int_{-1}^1 |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Der Fall $p = 2$ liefert die *mittlere quadratische Abweichung* (den „Fehler im Mittel“), $p = 1$ den *mittleren absoluten Fehler*. Allgemeiner betrachtet man für eine nicht-negative Gewichtsfunktion w auf $[-1, 1]$ die *gewichtete $L^p(w)$ -Norm*

$$(28) \quad \|g\|_{p,w} := \left(\int_{-1}^1 |g(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

Die gleichmäßige Norm $\|\cdot\|_\infty$ entsteht als Grenzfall $p \rightarrow \infty$. Aus der Ungleichung

$$(29) \quad \|g\|_p \leq 2^{1/p} \|g\|_\infty$$

folgt, dass gleichmäßige Konvergenz stets L^p -Konvergenz nach sich zieht; die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Es besteht also die Möglichkeit, dass

der Interpolationsfehler in einer L^p -Norm gegen Null konvergiert, obwohl er in der Supremumsnorm divergiert.

11.2. Äquidistante Stützstellen: Persistenz der Divergenz. Diese Hoffnung erfüllt sich bei äquidistanten Stützstellen nicht. Die punktweise Divergenz, die Bernstein [2] für $f(x) = |x|$ an *jedem* inneren Punkt $0 < |x| < 1$ nachwies (Abschnitt 4), ist so stark – Byrne, Mills und Smith [3] zeigten, dass die Divergenzrate exponentiell ist –, dass die Integration die wachsenden Oszillationen nicht kompensieren kann. Da der Interpolationsfehler auf einem Teilintervall positiven Maßes exponentiell anwächst, divergiert auch $\|f - P_n\|_p$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$. Für die Runge-Funktion (1) gilt Entsprechendes im Divergenzgebiet $|x| > 0,726$ (vgl. (15)): Die dort exponentiell anwachsenden Oszillationen (vgl. Eppersons Analyse [9]) dominieren jedes endliche Integralmaß. Bei äquidistanten Stützstellen beseitigt der Wechsel des Fehlermaßes das Runge-Phänomen also nicht.

11.3. Stützstellen aus Nullstellen orthogonaler Polynome. Grundsätzlich anders verhält es sich bei Stützstellensystemen, die aus den Nullstellen klassischer orthogonaler Polynome gewonnen werden. Der entscheidende Punkt ist dabei, dass die orthogonalen Polynome lediglich die *Stützstellen* liefern – das Interpolationspolynom selbst wird weiterhin als gewöhnliches Lagrange-Interpolationspolynom konstruiert.

Zur Präzisierung: Sei $w : [-1, 1] \rightarrow [0, \infty)$ eine integrierbare Gewichtsfunktion mit $\int_{-1}^1 w(x) dx > 0$. Die *orthogonalen Polynome* $p_0, p_1, p_2, \dots$ bezüglich w sind die (bis auf Normierung eindeutig bestimmten) Polynome vom Grad $\deg p_n = n$, die die Orthogonalitätsrelation

$$(30) \quad \int_{-1}^1 p_m(x) p_n(x) w(x) dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

erfüllen. Jedes p_n besitzt genau n einfache reelle Nullstellen in $(-1, 1)$, die wir mit $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ bezeichnen. Bekannte Spezialfälle sind:

- Die *Tschebyschow-Polynome erster Art* T_n (orthogonal bezüglich $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$) mit Nullstellen (22) – den im Abschnitt 8 behandelten Tschebyschow-Stützstellen.
- Die *Legendre-Polynome* P_n (orthogonal bezüglich $w(x) = 1$, dem konstanten Gewicht) mit den *Gauß-Legendre-Stützstellen*.
- Die allgemeinen *Jacobi-Polynome* $P_n^{(\alpha, \beta)}$ (orthogonal bezüglich dem Gewicht $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ mit Parametern $\alpha, \beta > -1$), die Tschebyschow- und Legendre-Polynome als Spezialfälle umfassen.

Verwendet man nun die n Nullstellen von p_n als Stützstellen für die Lagrange-Interpolation, so sind diese Stützstellen zugleich die *Knoten der Gauß-Quadraturformel* bezüglich w – und genau diese Verbindung zwischen Interpolation und Quadratur ist der Schlüssel zum folgenden Satz.

11.4. Der Satz von Erdős und Turán (1937). In ihrer grundlegenden Arbeit [11] bewiesen Paul Erdős und Pál Turán das folgende Resultat:

Satz 11.1 (Erdős–Turán, 1937). *Sei w eine nicht-negative, integrierbare Gewichtsfunktion auf $[-1, 1]$ mit $\int_{-1}^1 w(x) dx > 0$, und seien $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ die Nullstellen des n -ten orthogonalen Polynoms p_n bezüglich w . Bezeichne $L_n f$ das Lagrange-Interpolationspolynom an diesen Stützstellen. Dann gilt für jede stetige Funktion $f \in C([-1, 1])$:*

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |f(x) - L_n f(x)|^2 w(x) dx = 0.$$

Die *mittlere Konvergenz* im gewichteten $L^2(w)$ -Sinn ist also für alle stetigen Funktionen gesichert – und zwar für *jedes* Stützstellensystem, das aus Nullstellen orthogonaler Polynome hervorgeht. Dies steht in bemerkenswertem Kontrast zu Fabers Theorem (Abschnitt 5), das die gleichmäßige Konvergenz für jedes feste Stützstellenschema ausschließt.

Der Beweis von Erdős und Turán beruht auf der Beobachtung, dass die Stützstellen als Gauß-Quadraturknoten die exakte Integration aller Polynome vom Grad $\leq 2n - 1$ gewährleisten. Die Konvergenz der Gauß-Quadratur für stetige Funktionen überträgt sich dann auf die $L^2(w)$ -Konvergenz (31) der Interpolation.

11.5. Erweiterung auf L^p -Normen: Die Schwelle $p = 4$. Nevai [14] erweiterte ab 1980 den Satz von Erdős–Turán systematisch auf L^p -Normen. Für die gewichtete L^p -Konvergenz der Lagrange-Interpolation an Nullstellen von Jacobi-Polynomen $P_n^{(\alpha, \beta)}$ ergibt sich ein differenziertes Bild mit einer bemerkenswerten Schwelle beim Exponenten $p = 4$:

Für $1 < p < 4$ gilt die L^p -Konvergenz unter milden Bedingungen an die Gewichtsfunktion für alle stetigen Funktionen. Für $p \geq 4$ hingegen wird ein zusätzlicher kompensierender Gewichtungsfaktor in der L^p -Norm benötigt, um die Konvergenz zu sichern. Lubinsky und Damelin [15] vervollständigten diese Analyse in den 1990er-Jahren für allgemeinere Gewichtsklassen (sogenannte Erdős-Gewichte) und bestimmten notwendige und hinreichende Bedingungen für die L^p -Konvergenz.

Das Auftreten der Schwelle $p = 4$ hängt mit dem Wachstumsverhalten der *Christoffel-Funktionen* zusammen – einer Größe, die in der Theorie orthogonaler Polynome die Rolle übernimmt, die die Lebesgue-Konstante (7) in der gleichmäßigen Approximation spielt.

11.6. Divergenz selbst an Tschebyschow-Stützstellen. Die positiven Resultate von Erdős–Turán in der L^2 -Norm (Satz 11.1) stehen in aufschlussreicher Spannung zu einem gleichzeitig entdeckten negativen Ergebnis. Géza Grünwald [12] und Józef Marcinkiewicz [13] bewiesen 1936 bzw. 1937 unabhängig voneinander: Es existiert eine stetige Funktion $f \in C([-1, 1])$, für die die Lagrange-Interpolationspolynome an den *Tschebyschow-Stützstellen erster Art* (22) in *jedem* Punkt $x \in [-1, 1]$ divergieren. Dies zeigt, dass

selbst das bestmögliche Stützstellensystem die gleichmäßige – ja sogar die punktweise – Konvergenz für alle stetigen Funktionen nicht garantieren kann.

Die Kombination mit dem Satz von Erdős–Turán ergibt ein prägnantes Gesamtbild: Dieselben Tschebyschow-Stützstellen, an denen Grünwald und Marcinkiewicz eine überall punktweise divergente Interpolationsfolge konstruierten, liefern nach Satz 11.1 $L^2(w)$ -Konvergenz für *jede* stetige Funktion. Der Wechsel von der punktweisen zur integralen Betrachtung ändert die Konvergenzaussage qualitativ.

11.7. Hierarchie der Fehlermaße. Zusammenfassend ergibt sich folgende Hierarchie: Bei *äquidistanten* Stützstellen manifestiert sich das Runge-Phänomen in *allen* L^p -Normen ($1 \leq p \leq \infty$), da die exponentiell wachsenden Oszillationen an den Intervallrändern (vgl. (10)) durch Integration nicht kompensiert werden. Der Wechsel des Fehlermaßes schafft hier keine Abhilfe. Bei *optimaler Stützstellenwahl* (Nullstellen orthogonaler Polynome) hingegen zeigt sich eine echte Abstufung: Gleichmäßige Konvergenz (L^∞) versagt im Allgemeinen (Faber, Grünwald–Marcinkiewicz); L^p -Konvergenz für $1 < p < 4$ gelingt für alle stetigen Funktionen (Nevai); und $L^2(w)$ -Konvergenz ist universell gesichert (Erdős–Turán, Gleichung (31)). Die Wahl des Fehlermaßes ist somit nur dann entscheidungsrelevant, wenn sie mit einer guten Stützstellenwahl einhergeht.

LITERATUR

- [1] C. Runge, *Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **46** (1901), 224–243.
<https://archive.org/details/zeitschriftfma12runggoog>
- [2] S. N. Bernstein, *Quelques remarques sur l'interpolation*, Math. Ann. **79** (1918), 1–12.
[doi:10.1007/BF01457173](https://doi.org/10.1007/BF01457173)
- [3] G. J. Byrne, T. M. Mills und S. J. Smith, *On Lagrange interpolation with equidistant nodes*, Bull. Austral. Math. Soc. **42** (1990), Nr. 1, 81–89.
[doi:10.1017/S0004972700028161](https://doi.org/10.1017/S0004972700028161)
- [4] L. Zhikang und X. Mao, *The divergence of Lagrange interpolation in equidistant nodes*, Anal. Theory Appl. **19** (2003), 160–165.
[doi:10.1007/BF02835241](https://doi.org/10.1007/BF02835241)
- [5] G. Faber, *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **23** (1914), 190–210.
- [6] A. H. Turetskii, *The bounding of polynomials prescribed at equally distributed points*, Proc. Pedagog. Inst. Vitebsk **3** (1940), 117–127. (Russisch)
- [7] A. Schönhage, *Fehlerfortpflanzung bei Interpolation*, Numer. Math. **3** (1961), 62–71.
[doi:10.1007/BF01386001](https://doi.org/10.1007/BF01386001)
- [8] E. Isaacson und H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966. (Dover Reprint verfügbar)
- [9] J. F. Epperson, *On the Runge example*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), Nr. 4, 329–341.
[doi:10.2307/2323093](https://doi.org/10.2307/2323093)
- [10] L. N. Trefethen und J. A. C. Weideman, *Two results on polynomial interpolation in equally spaced points*, J. Approx. Theory **65** (1991), 247–260.
[doi:10.1016/0021-9045\(91\)90090-W](https://doi.org/10.1016/0021-9045(91)90090-W)

- [11] P. Erdős und P. Turán, *On interpolation, I. Quadrature and mean convergence in the Lagrange interpolation*, Ann. of Math. (2) **38** (1937), Nr. 1, 142–155.
[doi:10.2307/1968516](https://doi.org/10.2307/1968516)
- [12] G. Grünwald, *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), Nr. 4, 908–918.
[doi:10.2307/1968627](https://doi.org/10.2307/1968627)
- [13] J. Marcinkiewicz, *Sur la divergence des polynômes d'interpolation*, Acta Sci. Math. (Szeged) **8** (1937), 131–135.
- [14] P. Nevai, *Mean convergence of Lagrange interpolation, III*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), Nr. 2, 669–698.
[doi:10.1090/S0002-9947-1984-0732113-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0732113-4)
- [15] S.B. Damelin und D.S. Lubinsky, *Necessary and sufficient conditions for mean convergence of Lagrange interpolation for Erdős weights*, Canad. J. Math. **48** (1996), Nr. 4, 710–736.
[doi:10.4153/CJM-1996-037-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1996-037-1)

WILHELM BÜCHNER HOCHSCHULE, DARMSTADT

ANTHROPIC