Andreas U. Schmidt

Ergänzende Notizen zur Einführung in die Quantenfeld– und Stringtheorie

Vorlesung von

Prof. Dr. F. Constantinescu

Wintersemester 1995/96

Fachbereich Mathematik
Johann Wolfgang Goethe–Universität
Frankfurt am Main

Inhaltsverzeichnis

I *Vermischtes aus der Darstellungstheorie von Lie–Algebren*

I.1 Konventionelles

– $\mathfrak{g}$ sei eine endlichdimensionale Lie–Algebra über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

– $\cdot : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,,\ (x,y) \mapsto xy$ bezeichne das Produkt in $\mathfrak{g}$.

– $\mathscr{V} \equiv \{V_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ sei die Menge der Äquivalenzklkassen endlichdimensionaler, irreduzibler $\mathfrak{g}$–Moduln (d.h. aus jeder Klasse wählen wir den Repräsentanten V_i).

– Die V_i seien $\mathbb{K}$–Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (gleiche Bezeichnung für alle V_i). Wir setzen $n_i \equiv \dim V_i$.

– Bezüglich $\langle\cdot|\cdot\rangle$ wählen wir Orthonormalbasen in den V_i:

$$v_i \equiv \{v_{i\,\mu}\,,\ \mu = 1,\ldots,n_i\}.$$

– $R_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$ sei die Darstellung von $\mathfrak{g}$ in V_i. Für die Anwendung von $x \in \mathfrak{g}$ auf $v \in V_i$ schreiben wir $R_i(x).v$ oder, wenn klar ist um welche Darstellung es geht, einfach nur $x.v$. In den lokalen Basen v_i schreiben wir die Matrixelemente von $R_i(x)$ so:

$$R_i(x).v_{i\,\mu} = R_i(x)^{\mu'}{}_{\mu} v_{i\,\mu'}.$$

I.2 Einfache & halbeinfache Lie–Algebren

In diesem Abschnitt tragen wir einige Grundlagen der Theorie einfacher und halbeinfacher Lie–Algebren zusammen[1]. Zunächst ein paar Definitionen:

Ein *Ideal* $\mathscr{I} \subset \mathfrak{g}$ ist eine unter der Multiplikation von $\mathfrak{g}$ abgeschlossene Unteralgebra, das heißt, es gilt

$$xy \in \mathscr{I}\,, \quad \forall x \in \mathscr{I}\,,\ y \in \mathfrak{g}.$$

Ein Ideal $\mathscr{I}$ in $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar*, wenn die Reihe

$$\mathscr{I}^{(0)} \equiv \mathscr{I}\,, \quad \mathscr{I}^{(i+1)} \equiv \mathscr{I}^{(i)}\mathscr{I}^{(i)},\ i \geq 0,$$

die sogenannte *Deriviertenreihe* $(\mathscr{I}^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathscr{I}$ bei $\{0\}$ abbricht für endliches i. Das *Radikal* $\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ ist das größte auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. Man bildet außer der Reihe $\mathfrak{g}^{(i)}$ auch noch die *absteigende Zentralreihe* $\mathfrak{g}^i \equiv \mathfrak{g}\mathfrak{g}^{i-1}$ und nennt, falls diese abbricht, die Algebra *nilpotent*. Man kann leicht nachrechenen, daß $\mathfrak{g}^{(i)}$, $\mathfrak{g}^i$ aufgrund der Jacobi-Identität des Lie–Produktes Ideale in $\mathfrak{g}$ sind.

$\mathfrak{g}$ heißt nun *einfach* wenn $\mathfrak{g}$ außer $\{0\}$ und $\mathfrak{g}$ selbst keine Ideale enthält und *halbeinfach* wenn $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \{0\}$ ist.

[1]Detailliert nachzulesen in [1], Kap. II, §§1—4.

Da $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}\mathfrak{g}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist muß für einfaches $\mathfrak{g}$ also $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$ sein (wenn das Produkt in $\mathfrak{g}$ nicht trivial ist). Die ganze Algebra $\mathfrak{g}$ ist also nicht auflösbar. Daraus folgt, daß $\mathrm{rad}\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$ sein muß und somit, da $\mathfrak{g}$ nur $\mathfrak{g}$ und $\{0\}$ als Ideale hat, daß $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \{0\}$ gilt. Das heißt, wir haben Teil a) folgender Bemerkung

Bemerkung 1 *a) Jede einfache Lie–Algebra ist auch halbeinfach.*

b) Jede halbeinfache Lie–Algebra zerfällt in die direkte Summe einfacher Ideale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n.$$

Was hat dies mit den Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und ihrer (Ir)reduzibilität zu tun? Betrachten wir dazu die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$, in der $\mathfrak{g}$ selbst zum endlichdimensionalen $\mathfrak{g}$–Modul wird:

$$\mathrm{ad}: \ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}(x).y \equiv xy.$$

Mit dieser Definition ist klar, daß die invarianten Untermoduln der Darstellung ad gerade den Idealen in $\mathfrak{g}$ entsprechen. Damit überträägt sich Bemerkung 1 so

Bemerkung 2 *a)* $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ *ist genau dann irreduzibel, wenn* $\mathfrak{g}$ *einfach ist.*

b) Wenn $\mathfrak{g}$ *halbeinfach ist, dann ist* ad *vollständig reduzibel.*

Teil b) ist dabei ein Spezialfall des viel allgemeineren Resultats

Satz 3 (Weyl) *Jede endlichdimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie–Algebra ist vollständig reduzibel.*

Zuletzt merken wir noch an, daß für halbeinfache Lie–Algebren die Indexmenge I, die die irreduziblen Darstellungen indiziert, stets abzählbar ist[2]. Auf diesen Fall werden wir uns im folgenden meist beschränken.

I.3 Tensorprodukte von Darstellungen

Gegeben zwei $\mathfrak{g}$–Moduln V_R, V_S möchte man eine Darstellung auf $V_R \otimes V_S$ durch die einzelnen Darstellungen R und S definieren. Der einfachste Ansatz

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \ni x \quad \mapsto \quad & R \times S(x) \equiv R(x) \otimes S(x), \text{ d.h.} \\ & R \times S(x).v \otimes w \equiv (R(x).v) \otimes (S(x).w) \end{aligned} \tag{1}$$

schlägt aber fehl, da er offensichtlich nicht linear ist, also keine Darstellung einer Algebra definieren kann. (1) ist die richtige Definition, wenn man das Tensorprodukt von Darstellungen einer *Gruppe* definieren möchte.

Das nächst sinnvolle, das man probieren kann, ist die symmetrische Definition

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \ni x \quad \mapsto \quad & R \times S(x) \equiv R(x) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S(x), \text{ also} \\ & R \times S(x).v \otimes w \equiv (R(x).v) \otimes w + v \otimes (S(x).w). \end{aligned} \tag{2}$$

[2] **Stichwort: *Höchstgewichtsdarstellungen*, siehe zum Beispiel [2]**

Prüfen wir die Darstellungseigenschaft nach:

$$\begin{aligned} R\times S(xy) &= R(x)R(y)\otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S(x)S(y), \\ (R\times S(x))(R\times S(y)) &= R(x)R(y)\otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S(x)S(y) + \\ &\quad + R(x)\otimes S(y) + R(y)\otimes S(x). \end{aligned}$$

Das heißt, damit $R\times S$ eine Darstellung wird müßten die letzten beiden Mischterme verschwinden. Das ist insbesondere für Lie–Algebren der Fall. Ist nämlich das Produkt in $\mathfrak{g}$ antisymmetrisch, $xy = -yx,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}$, so gilt wegen der Linearität des Tensorprodukts $R\times S(xy) = -R\times S(yx)$, also

$$\begin{aligned} 0 &= R\times S(xy) + R\times S(yx) = \\ &= R(xy)\otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V\otimes S(xy) + R(yx)\otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S(yx) + \\ &\quad +2(R(x)\otimes S(y) + R(y)\otimes S(x)) = \\ &= 2(R(x)\otimes S(y) + R(y)\otimes S(x)), \end{aligned}$$

da auch die einzelnen Darstellungen antisymmetrisch sind. Also wird $V\otimes W$ zum Lie–Algebren–Modul mit Darstellung $R\times S$, dem sogenannten *Kroneckerprodukt* der Darstellungen R und S.

Man kann auch allgemeinere Bedingungen an $\mathfrak{g}$ stellen, die (2) zu einer Darstellung werden lassen. Dies führt auf das Konzept der *Hopf–Algebren*, bei denen man als zusätzliche Struktur das sogenannte *Koprodukt*

$$\Delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$

einführt, das gerade so gebaut ist, daß

$$(R\times S)\circ\Delta$$

eine Darstellung wird[3].

I.4 Von Darstellungen einer Lie–Gruppe zu Darstellungen ihrer Lie–Algebra

Die Definition (2) kommt nicht aus dem Nichts, sondern ist für Lie–Algebren sogar zwingend, wenn man sich erinnert, wie eine Lie–Gruppe mit ihrer zugehörigen Lie–Algebra zusammenhängt[4].

Zu einer gegebenen Lie–Gruppe G kann man ihre Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ auffassen als den Tangentialraum am neutralen Element $e\in$ G, d.h. die Elemente von $\mathfrak{g}$ sind Ableitungen von differenzierbaren Kurven durch e:

$$x = \partial_t(g(t))_{t=0},\ g(0) = e,\ \left(\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

und man erhält umgekehrt Gruppenelemente (in der Zusammenhangskomponente von e) durch die Exponentialabbildung

$$g = \exp(tx),$$

mit geeignetem $x\in\mathfrak{g}$. Analog bekommt man zu einem Homomorphismus von Lie–Gruppen durch Ableitung einen Homomorphismus der zugehörigen Lie–Algebren, d.h. eine lineare Abbildung, die die Lie–Klammer respektiert: Sei $\phi :$ G $\to$ H ein Homomorphismus, dann definiert

$$d\phi(x) = D\phi.x(e) = \partial_t\left(\phi(exp(tx))\right)_{t=0}$$

[3] Eine schöne Einführung findet man in [2], Abschnitt 4.1.

[4] Das ist sehr schön dargestellt in [3], Kap. 3 und auch etwas elementarer in [4], Kap. IV.

einen Homomorphismus $d\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der Lie–Algebren ($D\phi.x(e)$ ist dabei die gewöhnliche Tangentialabbildung von ϕ angewandt auf das Vektorfeld x am Punkt e). Die abgeleiteten Homomorphismen sind kompatibel mit der Exponentialabbildung im folgenden Sinne:

Satz 4 [5] *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{H} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

ist kommutativ.

Wählt man insbesondere als Homomorphismus ϕ eine Darstellung $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ in einem G–Modul V, so hat man eine zugehörige Darstellung $R \equiv d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, wobei man V mit seinem Tangentialraum TV identifiziert.

Für das gewöhnliche Tensorprodukt zweier Darstellungen ρ und σ von Lie–Gruppen G und H auf Moduln V und W

$$\rho \otimes \sigma : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W),\ \rho \otimes \sigma(g,h).v \otimes w \equiv \rho(g).v \otimes \sigma(h).w,\ \forall (g,h) \in \mathrm{G} \times \mathrm{H}$$

hat man dann als Ableitung mit $g(t) = e^{tx} \equiv \exp(tx)$, $h(t) = e^{ty} \equiv \exp(ty)$

$$\begin{aligned} d(\rho \otimes \sigma)(x,y).v \otimes w &= \partial_t \left(\rho \otimes \sigma(e^{tx}, e^{ty}).v \otimes w\right)_{t=0} = \\ &= \partial_t \left(\rho(e^{tx}).v \otimes \sigma(e^{ty}).w\right)_{t=0} = \\ &= \partial_t \rho(e^{tx})_{t=0}.v \otimes w + v \otimes \partial_t \sigma(e^{ty})_{t=0}.w = \\ &= (R(x) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S(y)).v \otimes w \end{aligned}$$

mit $R = d\rho$, $S = d\sigma$, also genau die Definition (2). Sind andererseits V und W $\mathfrak{g}$–, bzw. $\mathfrak{h}$–Moduln, so wird

$$\begin{aligned} \exp \circ (R \times S)(x,y).v \otimes w &= \exp \circ (R \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes S)(x,y).v \otimes w = \\ &= \exp(R \otimes \mathrm{id}_W) \exp(\mathrm{id}_V \otimes S)(x,y).v \otimes w, \end{aligned}$$

weil $(R \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_V \otimes S) = (\mathrm{id}_V \otimes S) \circ (R \otimes \mathrm{id}_W)$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ ist. Aus $(R \otimes \mathrm{id}_W)(x)^n = R(x)^n \otimes \mathrm{id}_W$ folgt für die Exponentialreihe $\exp \circ R \otimes \mathrm{id}_W(x) = \exp(R(x)) \otimes \mathrm{id}_W$ und analoges für $\exp(\mathrm{id}_V \otimes S)$. Damit wird

$$\begin{aligned} \exp \circ (R \times S)(x,y).v \otimes w &= (\exp(R(x)) \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \exp(S(y))).v \otimes w = \\ &= \exp(R(x)) \otimes \exp(S(y)).v \otimes w. \end{aligned}$$

Für die einzelnen Darstellungen kommutiert wieder die Entsprechung des Diagramms (3), das heißt, $\exp(R(x)) = \rho(\exp(x))$ und $\exp(S(y)) = \sigma(\exp(y))$. Also gilt:

$$\exp(R \times S)(x,y) = \rho \otimes \sigma(e^x, e^y), \tag{4}$$

mit anderen Worten haben wir die Kommutativität von (3) für das Kroneckerprodukt (2) von Darstellungen nocheinmal bewiesen.

---

[5] Siehe zum Beispiel [3], Thm. 3.32.

I.5 Clebsch–Gordan–Koeffizienten

Wie wir in Abschnitt I.2 gesehen haben, sind die endlichdimensionalen Darstellungen einer halbeinfachen Lie–Algebra sämtlich vollständig reduzibel. Insbesondere gilt dies auch für das Tensorprodukt $V_i \otimes V_j$ von irreduziblen Moduln. Es zerfällt in eine direkte Summe

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{k \in \mathrm{I}} \alpha_k^{ij} V_k, \tag{5}$$

wobei $\alpha_k^{ij} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ein *Multiplizitätsindex* ist, der angibt, wie oft V_k in der Zerlegung auftritt, d.h. $\alpha_k^{ij} V_k$ ist direkte Summe von α_k^{ij} identischen Kopien von V_k:

$$\alpha_k^{ij} V_k \equiv \bigoplus_{\alpha=1}^{\alpha_k^{ij}} V_k^\alpha, \; V_k^\alpha = V_k,$$

mit der Konvention $\alpha_k^{ij} V_k = \{0\}$ falls $\alpha_k^{ij} = 0$. Wir wollen jetzt die Zerlegung (5) in Koordinaten beschreiben. Dazu erzeugen wir aus den Basen v_i und v_j eine Basis

$$v_i \otimes v_j \equiv \{ v_{ij\,\mu\nu} \equiv v_{i\,\mu} \otimes v_{j\,\nu}, \; \mu = 1, \dots, n_i, \; \nu = 1, \dots, n_j \}$$

von $V_i \otimes V_j$. Diese ist orthonormal bezüglich des durch

$$\langle v_{ij}{}^{\mu\nu} | v_{ij\,\sigma\rho} \rangle \equiv \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho \tag{6}$$

definierten Skalarprodukts (wobei wir die Indizes des dualen Vektors nach oben gestellt haben). Wählen wir in jedem der V_k^α eine Orthonormalbasis

$$v_k^\alpha \equiv \{ v^\alpha_{k\,\mu}, \; \mu = 1, \dots, n_k \},$$

so wird der Basiswechsel von $v_i \otimes v_j$ nach der Vereinigung dieser Basen durch eine unitäre Matrix dargestellt:

$$v^\alpha_{k\,\lambda} = \sum_{\mu,\nu} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^\alpha v_{ij\,\mu\nu}, \tag{7}$$

für $k \in \mathrm{I}$, $\alpha = 1, \dots, \alpha_k^{ij}$ und $\lambda = 1, \dots, n_k$. Die Unitarität drückt sich darin aus, daß die Rücktransformation mit der adjungierten Matrix funktioniert, d.h. man muß die konjugiert komplexen Koeffizienten nehmen und über die Indizes k, α und λ der Basen v_k^α summieren:

$$v_{ij\,\mu\nu} = \sum_{k,\alpha,\lambda} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^\alpha} v^\alpha_{k\,\lambda}, \tag{8}$$

für $\mu = 1, \dots, n_i$, $\nu = 1, \dots, n_j$. Summiert wird dabei über $k \in \mathrm{I}$, $\alpha = 1, \dots, \alpha_k^{ij}$ und $\lambda = 1, \dots, n_k$. Die Zahlen $\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^\alpha$ heißen *Clebsch–Gordan–Koeffizienten*.

Die Clebsch–Gordan–Koeffizienten erfüllen, da sie die Matrix eines unitären Basiswechsels bilden, Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen:

Satz 5 *Es gilt*

Orthogonalität:

$$\sum_{\mu,\nu} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k' \\ \mu & \nu & \lambda' \end{pmatrix}^{\alpha'}} = \delta^{\lambda}_{\lambda'} \delta^{k}_{k'} \delta^{\alpha}_{\alpha'}.$$

Vollständigkeit:

$$\sum_{k,\alpha,\lambda} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu' & \nu' & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\mu'} \delta^{\nu}_{\nu'}.$$

Bezeichnen wir die Matrixelemente der Darstellung $R_i \times R_j$ in der Tensorbasis $v_i \otimes v_j$ mit $R_i \times R_j(x)^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu}$, so sind diese Matrizen mit den irreduziblen Darstellungen $R_i(x)^{\mu'}{}_{\mu}$ durch Ähnlichkeitstransformationen verbunden (man muß beachten, daß in jeder Kopie V_i^{α} von V_i die gleiche Darstellung R_i wirkt):

Satz 6 *(Reduktion des Kroneckerprodukts von Darstellungen): Es gilt*

$$R_i \times R_j(x)^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu} = \sum_{k,\alpha,\lambda',\lambda} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} R_k(x)^{\lambda'}{}_{\lambda} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu' & \nu' & \lambda' \end{pmatrix}^{\alpha}$$

und

$$\delta^{\alpha}_{\alpha'} \delta^{k}_{k'} R_k{}^{\mu'}{}_{\mu} = \sum_{\nu,\lambda,\nu',\lambda'} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \nu & \lambda & \mu \end{pmatrix}^{\alpha} R_i \times R_j(x)^{\nu'\lambda'}{}_{\nu\lambda} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k' \\ \nu' & \lambda' & \mu' \end{pmatrix}^{\alpha'}}.$$

Um es etwas anschaulich zu machen: Die Matrix $R_i \times R_k(x)^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu}$ wird also durch Konjugation mit den Clebsch–Gordan–Koeffizienten auf die Blockdiagonalform

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \underbrace{\boxed{R_{k_1}(x)}}_{n_{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{R_{k_1}(x)} \end{matrix}}_{\alpha^{ij}_{k_1} \text{ Blöcke}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\begin{matrix} \boxed{R_{k_m}(x)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\boxed{R_{k_m}(x)}}^{n_{k_m}} \end{matrix}}^{\alpha^{ij}_{k_m} \text{ Blöcke}} \end{pmatrix}$$

gebracht. Dabei sind nur die m Darstellungen (indiziert durch $\{k_1, \ldots, k_m\} \subset \mathrm{I}$) eingetragen, für die $\alpha^{ij}_{k_l} \neq 0$ ist. Aus dieser Darstellung kann man sofort die *Dimensionsformel*

$$\dim V_i \otimes V_j = n_i n_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} n_{k_i}$$

ablesen.

Aus der Physik kennt man die Clebsch–Gordan–Koeffizienten unter dem Namen *3j–Symbole*[6]. Sie beschreiben die Addition von Drehimpulsen in der Quantenmechanik. Hat man zwei Darstellungen $D^{(j_1)}, D^{(j_2)}$ der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ zu den Drehimpulsen j_1 und j_2 (mit Dimensionen $2j_1+1$ und $2j_2+1$), dann läßt sich das Tensorprodukt der Darstellungen so zerlegen:

$$D^{(j_1)} \times D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} + D^{(j_1+j_2-1)} + \ldots + D^{(|j_1-j_2|)}.$$

Im Darstellungsraum zum Drehimpuls j wählt man Orthonormalbasen $|jm\rangle$, $m=-j,\ldots,j$, wobei m üblicherweise die Projektion des Drehimpulses auf eine ausgezeichnete Achse ist und schreibt für die Koeffizienten der Übergangsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$$

(mit einigen Vorfaktoren verziert). Das Besondere an der Darstellungstheorie der $\mathrm{SO}(3)$ (wie auch der $\mathrm{SU}(2)$ und der Lie-Algebren $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) ist, daß dort alle Multiplizitäten gleich Eins sind, es tritt also jeder Modul nur einmal auf, was die Behandlung wesentlich vereinfacht.

I.6 Das Wigner–Eckart–Theorem

Die einfachste physikalische Anwendung der Clebsch–Gordan–Koeffizienten in der Quantenmechanik ist die Berechnung von Matrixelementen hermitescher Operatoren in Tensorproduktdarstellungen einer Symmetriegruppe G. Das heißt, man möchte Erwartungswerte von Observablen in Mehrteilchenzuständen ausrechnen.

Wichtiger ist aber folgendes: Man findet in der Quantenmechanik öfters Observablen, die sich selbst in bestimmter Weise unter einer Gruppendarstellung transformieren. Wirkt nämlich im physikalischen Hilbertraum eine Symmetrieoperation, d.h. eine Operation, die alle Übergangswahrscheinlichkeiten invariant läßt, so kann die Symmetrie nach dem berühmten Theorem von Wigner[7] immer durch einen unitären oder antiunitären Operator U implementiert werden. Die Matrixelemente physikalischer Observablen müssen dann ebenfalls invariant sein, d.h. $\langle\Psi'|O|\Phi'\rangle = \langle\Psi|UOU^{-1}|\Phi\rangle \equiv \langle\Psi|O'|\Phi\rangle$ für alle Φ, Ψ im Hilbertraum. Daraus folgt, daß sich die Observable O unter der Symmetrie gemäß $O' = UOU^{-1}$ transformieren muß, wenn man die physikalischen Zustände als invariant betrachtet. Dies entspricht dem Wechsel zwischen aktiver und passiver Interpretation einer Symmetrieoperation.

Seien wir spezifisch und betrachten im folgenden einen physikalischen Hilbertraum $\mathscr{H}$, auf dem eine (Symmetrie–)Gruppe G unitär operiert durch

$$g \mapsto U(g), \quad |v\rangle \mapsto U(g)|v\rangle \in \mathscr{H}, \quad \forall g \in \mathrm{G}, v \in \mathscr{H}.$$

Sei nun V ein irreduzibler G–Untermodul von $\mathscr{H}$, d.h. ein endlichdimensionaler Unterraum von $\mathscr{H}$, in dem U wie die irreduzible Darstellung R operiert:

$$U(g)|v\rangle = |R(g).v\rangle, \quad \forall g \in \mathrm{G}, v \in \mathscr{H}$$

[6] Vergleiche die schöne Darstellung in [5], S. 101 ff. Eine ziemlich vollständige Behandlung der Drehimpulsalgebra ist [6].

[7] Zu diesem Thema von grundlegender Bedeutung für die Quantentheorie siehe den leicht verständlichen Überblick in [7], S. 27 ff., den kompletten Beweis in [8], Abschnitt 6.3, die klare Diskussion in [9], Kap. 5, Top. 1 und die unter mathematischen Gesichtspunkten interessante Darstellung in [10], Kap. X.

(hier kann man $|\ \rangle$ gut als Einbettung $V \hookrightarrow \mathscr{H}$ verstehen). Es können durchaus viele Kopien des G–Moduls V in $\mathscr{H}$ vorkommen, jetzt wählen wir aber ein festes V_j, $j \in \mathrm{I}$ und davon eine feste Kopie $\left|V_j\right\rangle$ in $\mathscr{H}$ aus.

Man möchte jetzt den Fall betrachten, daß die Anwendung einer Menge $\{O_{i\mu}, \mu = 1,\ldots,n_i\}$ von Operatoren in $\mathscr{H}$, die in gewisser Weise zu einer weiteren irreduziblen Darstellung $i \in \mathrm{I}$ „gehören", auf V_j wieder in ein G–Modul in $\mathscr{H}$ führt. Und zwar soll dies ein Modul zur Tensorproduktdarstellung $R_i \times R_j$, definiert durch (1),sein. Dazu müssen die $O_{i\mu}$ die Bedingung

$$U(g)O_{i\mu}U(g)^{-1} = R_i(g)^{\mu'}{}_{\mu}O_{i\mu'} \tag{9}$$

erfüllen, d.h. die Adjunktion mit $U(g)$ muß genau die Darstellung im G–Modul $\mathscr{O}_i \equiv \mathrm{lin}\{O_{i\mu}\}$ induzieren. Auf dem formalen Tensorprodukt

$$\left|\mathscr{O}_i \otimes V_j\right\rangle \equiv \mathrm{lin}\{\left|O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle \equiv O_{i\mu}\left|v_{j\nu}\right\rangle | \,\mu = 1,\ldots,n_i,\ \nu = 1,\ldots,n_j\}$$

operiert dann G so:

$$\begin{aligned} U(g)\left|O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle &= U(g)O_{i\mu}U(g)^{-1}U(g)\left|v_{j\nu}\right\rangle = R_i(g)^{\mu'}{}_{\mu}R_j(g)^{\nu'}{}_{\nu}\left|O_{i\mu'} \otimes v_{j\nu'}\right\rangle = \\ &= R_i \times R_j(g)^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu}\left|O_{i\mu'} \otimes v_{j\nu'}\right\rangle = \left|R_i \times R_j(g).O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle, \end{aligned}$$

also genau durch die Tensorproduktdarstellung. Man nennt solche Systeme $\mathscr{O}_i$ *irreduzible Tensoroperatoren* oder einfach *Tensoren* der Darstellung R_i.

Man kann jetzt $\left|\mathscr{O}_i \otimes V_j\right\rangle$ mit den Clebsch–Gordan–Koeffizienten nach (8) zerlegen:

$$\left|O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle = \sum_{k,\alpha,\lambda} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} |v^{\alpha}_{k\lambda}\rangle. \tag{10}$$

Will man nun ein Matrixelement eines Vektors aus $\left|\mathscr{O}_i \otimes V_j\right\rangle$ mit einem Vektor $\left\langle w_l{}^{\rho}\right|$ in einem *anderen* irreduziblen G–Untermodul $\left|W_l\right\rangle$ zur Darstellung R_l, $l \in \mathrm{I}$, bilden, so geht das jetzt sehr einfach, da man weiß, daß Unterräume von $\mathscr{H}$, die zu inäquivalenten Darstellungen von G gehören,orthogonal zueinander sind. Das heißt, Bildung des Skalarprodukts mit $\left\langle w_l{}^{\rho}\right|$ pickt gerade die l-te Darstellungskomponente aus der Summe heraus:

$$\langle w_l{}^{\rho}\left|O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle = \sum_{\alpha} \overline{\begin{pmatrix} i & j & l \\ \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}^{\alpha}} \left\{ \frac{1}{n_l} \sum_{\lambda} \langle w_l{}^{\lambda} | v^{\alpha}_{k\lambda} \rangle \right\} \equiv \sum_{\alpha} \overline{\begin{pmatrix} i & j & l \\ \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}^{\alpha}} \langle w_l{}^{\rho} || O_{i\mu} || v_{j\mu} \rangle_{\alpha}, \tag{11}$$

mit dem *reduzierten Matrixelement* $\langle w_l{}^{\rho} || O_{i\mu} || v_{j\mu} \rangle_{\alpha}$. Anders als in (6) sind die $v^{\alpha}_{k\lambda}$ im allgemeinen nicht orthonormal, weil wir das i.a. *nicht* orthonormale System von Tensoren $\left|O_{i\mu} \otimes v_{j\nu}\right\rangle$ mit den gewöhnlichen Clebsch–Gordan–Koeffizienten zerlegt haben. Daher die Spurbildung im reduzierten Matrixelement. Die Normierung $1/n_l$ versteht man, wenn man für $O_{i\mu}$ einfach die Tensorproduktbildung (d.h. die Erzeugung eines Mehrteilchenzustandes) mit $\left|v_{i\mu}\right\rangle \in |V_i\rangle$ einsetzt, denn dann muß das reduzierte Matrixelement gerade eins sein.

(11) ist das (unter Physikern) berühmte *Wigner–Eckart–Theorem*. Außer seiner praktischen Nützlichkeit für die Berechnung von Übergangsamplituden[8] ist es auch von konzeptueller Bedeutung: Es sagt einem, welcher Anteil des Erwartungswertes einer Tensorobservablen vom betrachteten physikalischen System abhängt — nämlich das reduzierte Matrixelement — und welcher von der Darstellungsstruktur einer unterliegenden Symmetrie herrührt. Bemerkenswert ist dabei, daß das reduzierte Matrixelement

$$\langle l||O_i||j\rangle_\alpha \equiv \langle {w_l}^\rho||O_{i\mu}||v_{j\mu}\rangle_\alpha$$

tatsächlich nur noch von den Darstellungen l, i und j und überhaupt nicht mehr von den speziellen Vektoren in den Moduln abhängt. Die ganze Abhängigkeit von μ, ν und ρ ist in den Clebsch–Gordan–Koeffizienten versteckt. Die spezifische Wirkung der Operatoren in $\mathscr{O}_i$ auf die Zustände, also die Physik in der Sache, steckt dagegen in der Zerlegung (10).

Den Begriff des Tensoroperators kann man übrigens auch auf das Kroneckerprodukt (2) von Lie–Algebren–Darstellungen übertragen, wobei wie zu erwarten die Adjunktion in (9) in den Kommutator übergehen muß. Ist nämlich $|V\rangle \subset \mathscr{H}$ ein $\mathfrak{g}$–Untermodul mit Darstellung S und man möchte, daß sich ein bestimmter Operator O tensoriell bezüglich einer zweiten Darstellung R verhält, so heißt dies nach (2)

$$x.(O|v\rangle) = (R(x).O)|v\rangle + O(S(x).|v\rangle) = R\times S(x).|O\otimes v\rangle,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß sich O unter der Darstellung R transformiert (wie auf der rechten Seite von (9)). Daraus folgt, daß der Kommutator $[x,O].|v\rangle \equiv x.(O|v\rangle) - O(S(x).|v\rangle)$ gleich der Anwendung von x auf O sein muß:

$$(R(x).O)|v\rangle = [x,O]|v\rangle. \tag{12}$$

Diese Bedingung ist die Lie–Algebren–Analogie von (9).

I.7 Racah–Wigner–Koeffizienten, 6j–Symbole

Für endlichdimensionale Vektorräume U,V,W ist das Tensorprodukt assoziativ in dem Sinne, daß es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus Φ von $U\otimes(V\otimes W)$ nach $(U\otimes V)\otimes W$ gibt. Daraus und aus (2) folgt, daß die Tensorprodukte

$$R\times(S\times T) = R\otimes \mathrm{id}_{V\otimes W} + \mathrm{id}_U\otimes(S\times T) = R\otimes(\mathrm{id}_V\otimes\mathrm{id}_W) + \mathrm{id}_U\otimes(S\otimes\mathrm{id}_W) + \mathrm{id}_U\otimes(\mathrm{id}_V\otimes T)$$

und

$$(R\times S)\times T = (R\times S)\otimes\mathrm{id}_W + \mathrm{id}_{U\otimes V}\otimes T = (R\otimes\mathrm{id}_V)\otimes\mathrm{id}_W + (\mathrm{id}_U\otimes S)\otimes\mathrm{id}_W + (\mathrm{id}_U\otimes\mathrm{id}_V)\otimes T$$

der Darstellungen auf U,V,W kanonisch äquivalent sind (man konjugiere dazu in jedem Summanden mit dem Isomorphismus Φ). Das heißt, wir haben Äquivalenz der $\mathfrak{g}$–Moduln

$$U\otimes(V\otimes W) \simeq (U\otimes V)\otimes W. \tag{13}$$

[8] Für einige instruktive Beispiele siehe [11], S. 61 ff.

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts muß sich die Assoziativität auch in der Ausreduktion beider Seiten von (13) bemerkbar machen, indem sie zu Beziehungen zwischen den Clebsch–Gordan–Koeffizienten führt. Sind nämlich V_i, V_j, V_l mit Basen v_i, v_j, v_l gegeben, so erhält man nach (8) die Ausreduktionen

$$(v_{i\mu} \otimes v_{j\nu}) \otimes v_{l\sigma} = \left[\sum_{k,\alpha,\lambda} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} v^{\alpha}_{k\lambda} \right] \otimes v_{l\sigma} = \sum_{\substack{k,\alpha,\lambda \\ m,\beta,\rho}} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} \, \overline{\begin{pmatrix} k & l & m \\ \lambda & \sigma & \rho \end{pmatrix}^{\beta}} v^{\beta}_{m\rho}, \tag{14a}$$

$$v_{i\mu} \otimes (v_{j\nu} \otimes v_{l\sigma}) = \quad \dots \quad = \sum_{\substack{n,\alpha',\lambda' \\ m',\beta',\rho'}} \overline{\begin{pmatrix} j & l & n \\ \nu & \sigma & \lambda' \end{pmatrix}^{\alpha'}} \, \overline{\begin{pmatrix} i & n & m' \\ \mu & \lambda' & \rho' \end{pmatrix}^{\beta'}} v^{\beta'}_{m'\rho'}. \tag{14b}$$

Die Isomorphie (13) bedeutet nun, daß es Koeffizienten gibt, die (14a) und (14b) in folgende Beziehung setzen:

$$\overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} \, \overline{\begin{pmatrix} k & l & m \\ \lambda & \sigma & \rho \end{pmatrix}^{\beta}} = \sum_{\substack{n,\alpha',\lambda' \\ \beta',\rho'}} \overline{\begin{pmatrix} j & l & n \\ \nu & \sigma & \lambda' \end{pmatrix}^{\alpha'}} \, \overline{\begin{pmatrix} i & n & m \\ \mu & \lambda' & \rho' \end{pmatrix}^{\beta'}} \begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}^{\alpha'\beta'}{}_{\alpha\beta}(\mu,\nu,\sigma;\lambda,\lambda',\rho,\rho'). \tag{15}$$

Das ging so: Man kann in (14a) und (14b) auf eine feste Komponente V_m projizieren. Da die irreduziblen Moduln $V_m,\ m \in \mathrm{I}$, inäquivalent gewählt wurden, wird dadurch der äußere Index m links festgelegt. Allerdings sind dabei die Multiplizitäten zu beachten: In (14a) projiziert man auf eine feste Kopie V^{β}_m und darin auf einen festen Vektor $v^{\beta}_{m\rho}$. In (14b) hat man dagegen eine β'^{in}_{m}–fache direkte Summe von V_m–Kopien vorliegen. Aus diesen können Anteile sich mischen, da die entsprechenden $\mathfrak{g}$–Moduln äquivalent sind. Das heißt, die Summe über β' und ρ' bleibt rechts bestehen. Legt man jetzt noch die Indizes des „Zwischensektors“ k, λ und α durch eine weitere Projektion fest, dann kommt man auf obige Form.

Um einen basisunabhängigen Ausdruck zu bekommen, kann man partielle Spuren über alle vorkommenden Moduln bilden. Man wird dann wieder Koeffizienten finden, so daß

$$\sum_{\mu,\nu,\sigma,\lambda,\rho} \overline{\begin{pmatrix} i & j & k \\ \mu & \nu & \lambda \end{pmatrix}^{\alpha}} \, \overline{\begin{pmatrix} k & l & m \\ \lambda & \sigma & \rho \end{pmatrix}^{\beta}} = \sum_{\substack{n,\alpha',\beta' \\ \mu,\nu,\sigma,\lambda',\rho'}} \overline{\begin{pmatrix} j & l & n \\ \nu & \sigma & \lambda' \end{pmatrix}^{\alpha'}} \, \overline{\begin{pmatrix} i & n & m \\ \mu & \lambda' & \rho' \end{pmatrix}^{\beta'}} \begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}^{\alpha'\beta'}{}_{\alpha\beta}$$

gilt.

Um klarer zu verstehen, was die $\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}^{\alpha'\beta'}{}_{\alpha\beta}$ mit der Assoziativität des Tensorprodukts zu tun haben, gehen wir die Sache etwas abstrakter an[9]. Betrachten wir die $\mathbb{C}$–Vektorräume

$$H^k_{ij} \equiv \mathrm{Hom}(V_i \otimes V_j, V_k) \quad \text{und} \quad H^{ij}_k \equiv \mathrm{Hom}(V_k, V_i \otimes V_j) \tag{16}$$

der linearen Homomorphismen vom Tensorproduktmodul $V_i \otimes V_j$ in einen der Moduln V_k der Zerlegung (5) bzw. umgekehrt. Jedes V_k kommt nun in der Zerlegung genau α^{ij}_k–mal als Untermodul vor, was nichts anderes bedeutet, als daß

$$\dim H^k_{ij} = \dim H^{ij}_k = \alpha^{ij}_k$$

[9] **Die Darstellung folgt hier [12], Kap. 6.**

ist. Man nennt daher die H^k_{ij}, H^{ij}_k *Multiplizitätsmoduln* (Modul meint hier nur $\mathbb{C}$–Vektorraum). Schaut man sich die Basistransformationen (7) und (8) an, so wird der Zusammenhang mit den Clebsch–Gordan–Koeffizienten klar. Für $\alpha = 1,\ldots,\alpha^{ij}_k$ sind die linearen Abbildungen

$$H^k_{ij} \ni \binom{i\,j\,k}{\cdot\,\cdot\,\cdot}^{\alpha} : V_i \otimes V_j \to V_k, \qquad H^{ij}_k \ni \overline{\binom{i\,j\,k}{\cdot\,\cdot\,\cdot}^{\alpha}} : V_k \to V_i \otimes V_j$$

(aufgefaßt als Matrizen in den unteren Indizes) nichts anderes als mögliche Basiselemente der Multiplizitätsmoduln H^k_{ij} bzw. H^{ij}_k, mit α als Basisindex.

Wenden wir uns erneut den Zerlegungen (14a, 14b) des Tensorprodukts $V_i \otimes V_j \otimes V_l$ zu. Versteht man die beiden Gleichungen — von rechts nach links gelesen und bei fixiertem Ausgangsmodul V_m — als Abbildungsvorschriften, dann sind sie Elemente des Raums

$$\mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l).$$

Aus (14a) extrahieren wir für jedes feste $k \in \mathrm{I}$ lineare Abbildungen

$$V_m \xrightarrow{x} V_k \otimes V_l \xrightarrow{y \otimes \mathrm{id}_{V_l}} V_i \otimes V_j \otimes V_l, \qquad \text{mit } x \in H^{kl}_m,\ y \in H^{ij}_k$$

und analog aus (14b) für festes n

$$V_m \xrightarrow{a} V_i \otimes V_n \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_i} \otimes b} V_i \otimes V_j \otimes V_l, \qquad \text{mit } a \in H^{in}_m,\ b \in H^{jl}_n.$$

Diese Abbildungen sind nun linear sowohl in x bzw. a als auch in y bzw. b. Sie lassen sich also zu Homomorphismen von Tensorprodukten der Multiplizitätsmoduln fortsetzen:

$$\begin{array}{ccc} H^{kl}_m \otimes H^{ij}_k & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l), \\ x \otimes y & \longmapsto & (y \otimes \mathrm{id}_{V_l}) \circ x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} H^{in}_m \otimes H^{jl}_n & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l), \\ a \otimes b & \longmapsto & (\mathrm{id}_{V_i} \otimes b) \circ a. \end{array} \tag{17}$$

Das entscheidende Argument ist nun folgendes: Die vollständigen Zerlegungen (14a, b) — d.h. inklusive der Summen über k bzw. n — sind gleich, also sind die zugehörigen Homomorphismen aus $\mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l)$ gleich. Wir erhalten so eine *Kette von Isomorphien*

$$\bigoplus_k H^{kl}_m \otimes H^{ij}_k \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l) \longrightarrow \bigoplus_n H^{in}_m \otimes H^{jl}_n. \tag{18}$$

Als Isomorphie von direkten Summen von Vektorräumen muß der gesamte Isomorphismus sich nach den einzelnen Summanden in Blöcke aufteilen lassen. Projiziert man rechts auf einen Summanden $n \in \mathrm{I}$ und schränkt links auf einen Summanden $k \in \mathrm{I}$ ein, so liefert dies Homomorphismen

$$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix} : H^{kl}_m \otimes H^{ij}_k \longrightarrow H^{in}_m \otimes H^{jl}_n, \tag{19}$$

die die Blockmatrizen des Isomorphismus (18) sind. Dabei gibt es für festes i, j, l, m immer nur endlich viele Paare von Blockindizes (k,n), für die (19) ungleich Null ist. Die Symbole $\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}$ heißen *Racah–Wigner–Koeffizienten*, oder — wenn man physikalische Bezeichnungen mißbrauchen will — *6j–Symbole*.

Nehmen wir uns nun ein festes Element $x \otimes y$ aus $H_m^{kl} \otimes H_k^{ij}$ vor. Das volle Bild von $x \otimes y$ in $\bigoplus_n H_m^{in} \otimes H_n^{jl}$ erhält man, wenn man (19) anwendet und über n summiert. Die Isomorphie (18) sagt dann aus, daß wir damit den gleichen Morphismus aus $\mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l)$ erhalten, d.h.

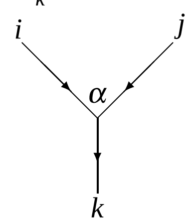
$$(x \otimes y) \cong \sum_n \begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix} .(x \otimes y).$$

Dabei ist das Zeichen $\cong$ so zu verstehen, daß die Bilder der beiden Seiten unter den entsprechenden Abbildungen aus (17) in $\mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes V_j \otimes V_l)$ übereinstimmen.

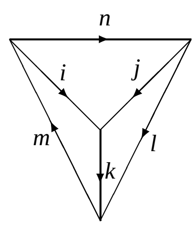
Kehren wir mit den gewonnenen Erkenntnissen zu unserem handwerklichen Definitionsversuch (15) zurück, so wird klar:

1. Die Summen über die Multiplizitätsindizes entsprechen der Anwendung des 6j–Symbols auf Basiselemente von Tensorprodukten von Multiplizitätsmoduln (nämlich gerade die Clebsch–Gordan–Koeffizienten). Man beachte, daß wir in (15) im wesentlichen die umgekehrte Transformation wie in (19) benutzt haben, um dann die Bilder direkt in $H_m^{kl} \otimes H_k^{ij}$ zu vergleichen.
2. Die Symbole in (15) sind in Wirklichkeit schon basisunabhängig, hängen also nicht von den Indizes $(\mu, \nu, \sigma; \lambda, \lambda', \rho, \rho')$ ab.
3. Sind die Multiplizitäten alle gleich Eins, wie das etwa bei der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und der $\mathfrak{su}(2)$ der Fall ist, so sind die 6j–Symbole tatsächlich Skalare und keine Matrizen mehr.

Die 6j–Symbole werden standardmäßig graphisch als Tetraeder dargestellt. Stellt man sich ein (Basis-)Element des Multiplizitätsmoduls H_k^{ij} als gerichteten *Vertex*



vor (der Multiplizitätsindex α wählt ein Basiselement aus, wir lassen ihn jetzt erstmal weg), so kann man das Symbol $\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}$, das durch vier solcher Elemente definiert wird, durch den Tetraeder



darstellen[10].

Aufgabe: Wie wurden die Pfeilrichtungen gewählt? Vergleiche [12], Abschn. VI.1.4. Wähle Basen in den Multiplizitätsmoduln, stelle das 6j–Symbol (als Matrix) in diesen Koordinaten dar und füge den Vertizes die entsprechenden Indizes hinzu.

[10] **Zu weiteren Darstellungsmöglichkeiten der 6j–Symbole, insbesondere zu Zusammenhängen mit der projektiven Geometrie siehe [9], Kap. 5, Top. 8. Vergleiche auch [13].**

I.8 Brauer–Weyl–Theorie

Der Satz von Peter und Weyl, von dem Satz 3 eine Teilaussage darstellt und auf dem üblicherweise die Darstellungstheorie halbeinfacher Algebren wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben aufbaut, hat wenigstens drei Nachteile:

1. Seine Anwendung setzt voraus, daß man tatsächlich etwas über die Halbeinfachheit der Algebra weiß, was vielleicht gar nicht immer der Fall ist, insbesondere bei

2. unendlichdimensionalen Algebren, z.B. *von Neumann Algebren*[11] von Operatoren in Hilberträumen. Zwar weiß man, daß diese in einem verallgemeinerten Sinn immer halbeinfach sind, aber über den unendlichdimensionalen Fall sagt Peter–Weyl gar nichts aus.

3. Will man das f–fache Tensorprodukt $V^{\otimes f}$ eines Moduls konkret ausreduzieren, also zum Beispiel auch die Clebsch–Gordan–Koeffizienten ausrechnen, so muß man sich irgendwie Basen in den irreduziblen Moduln beschaffen. Es wäre schön, wenn man nur ausgehend von der Darstellung in $V^{\otimes f}$ einen unabhängigen Zugang zur Ausreduktion hätte.

Richard Brauer fand in den dreißiger Jahren einen Ansatz zur Behandlung des dritten Problems[12], der wenig über die Algebra voraussetzt und damit auch einen allgemeinen Weg zur Untersuchung der unter 1 und 2 erwähnten Probleme aufzeigt.

Brauer betrachtete folgende Frage der *klassischen Invariantentheorie*[13]: Gegeben sei eine Darstellung $R^{\times f}$ einer Lie–Gruppe G auf $V^{\otimes f}$. Wie sieht die Zerlegung von $V^{\otimes f}$ in irreduzible Untermoduln aus? Zunächst kommt man zurück zum entsprechenden Problem für Algebren, wenn man sich klarmacht, daß man zur Bestimmung der invarianten, irreduziblen Teilräume o.B.d.A. zur einhüllenden Algebra oder *Gruppenalgebra*

$$A_f \equiv A_f(\mathrm{G}) \equiv \widetilde{R^{\times f}(\mathrm{G})}$$

der Gruppe der Darstellungsmatrizen übergehen kann. Ein Weg, unser Problem anzugehen, ist nun, die Kommutante von A_f

$$B_f \equiv A'_f = \left\{ y \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes f}) \,\middle|\, y \circ R^{\times f}(g) = R^{\times f}(g) \circ y,\ \forall g \in \mathrm{G} \right\},$$

d.h. die Menge aller mit A_f kommutierenden Matrizen zu betrachten und erstmal diese auszureduzieren. Leitgedanken dabei sind:

1. B_f sieht vielleicht viel einfacher aus als A_f. In der Regel ist sogar B_f um so einfacher, je komplexer A_f ist.

2. Ein vollständiger Satz kommutierender Operatoren ist gleichzeitig diagonalisierbar.

3. Eine Zerlegung reduzibler Räume bezüglich einer Untermenge kommutierender Operatoren führt oft auf natürliche Weise zu einer Diagonalisierung der restlichen Operatoren. Prominentes Beispiel dafür ist die Diagonalisierung eines Hamiltonoperators mit Translationssymmetrie auf einem eindimensionalen Gitter[14].

---

[11] Siehe zum Beispiel das Lehrbuch [14].
[12] Die Originalarbeit hierzu ist [15].
[13] Vergleiche [16].
[14] Ausführlich ist dies nachzulesen in [11], Abschnitt 1.3.

Machen wir nun die

Annahme B_f *ist halbeinfach.*

Das heißt, wir finden eine vollständige Ausreduktion

$$V^{\otimes f} = \bigoplus_i \bigoplus_\alpha T_i^\alpha \tag{20}$$

von $V^{\otimes f}$ in irreduzible, invariante Unterräume T_i^α, abgezählt durch den Darstellungsindex i und den Multiplizitätsindex α. Wählen wir für festes i und alle zugehörigen α geeignete Basen t_i^α in den T_i^α, so wirkt in allen T_i^α die gleiche Matrixdarstellung D_i von B_f:

$$x.t_{i\mu}^\alpha = D_i(x)^{\mu'}{}_\mu t_{i\mu'}^\alpha, \quad \forall\alpha,\ \forall x \in B_f.$$

Zur Entwicklung der Brauer-Weyl-Theorie ist ein etwas anderer Zugang zur Ausreduktion (20) günstig, nämlich der durch *idempotente Elemente* und *Linksideale* beschriebene. Wir hatten bereits in I.2 gesehen, wie sich Ideale in einer Algebra und invariante Unterräume entsprechen. Die Frage ist nun, ob es Elemente in der Algebra gibt, die den Projektoren auf diese Unterräume entsprechen. Die Antwort ist für halbeinfache Algebren positiv und läßt sich grob zusammenfassen in dem

Satz 7 [15] *Sei B eine halbeinfache Algebra mit Einselement e. Dann gibt es idempotente Elemente* $e_i \in B$, $e_i^2 = e_i$, *wobei der Index i über die irreduziblen, endlichdimensionalen Darstellungen von B läuft, so daß gilt:*

i) Die e_i *haben die Eigenschaft* $xe_i = e_i x = e_i x e_i$, $\forall i$, $\forall x \in B$.

ii) e gestattet die Zerlegung $e = \sum_i e_i$.

iii) Die Idempotenten annullieren sich gegenseitig: $e_i e_j = 0$, *für* $i \neq j$.

iv) Die von den e_i *erzeugten Linksideale* $L_i \equiv \{xe_i | x \in B\}$ *zerlegen B:* $B = \bigoplus_i L_i$.

Im Fall unserer Kommutanten B_f, die nach der Annahme eine halbeinfache Algebra mit Einselement $e = \mathrm{id}_{V^{\otimes f}}$ ist, kann man also die Unterräume T_i^α erzeugen, indem man einen bestimmten Vektor t^α und ein idempotentes Element e_i auswählt:

$$T_i^\alpha = L_i.t^\alpha = \{xe_i.t^\alpha | x \in B_f\}.$$

Die e_i sind nun Stellvertreter für Projektionen und kommutieren mit A_f. Daher ist ziemlich klar, daß die Wirkung von A_f und damit die von G die *Darstellung i* respektiert. Läßt man nämlich $a = R^{\times f}(g) \in A_f$, $g \in \mathrm{G}$, auf einen Vektor $xe_i.t^\alpha \in T_i^\alpha$ wirken, so erhält man

$$a(xe_i).t^\alpha = (xe_i).(a.t^\alpha),$$

weil A_f und B_f kommutieren und wegen der Eigenschaften der idempotenten Elemente. Ist nun $a.t^\alpha \neq 0$, so erzeugt dieser Vektor unter Wirkung von L_i wieder einen irreduziblen, invarianten Unterraum T_i^β zur gleichen Darstellung i. Das bedeutet nichts anderes, als daß A_f und damit G selbst auf der direkten Summe $\bigoplus_\alpha T_i^\alpha$ durch eine Matrixdarstellung R_i operiert:

$$g.t_{i\mu}^\alpha = R^{\times f}(g).t_{i\mu}^\alpha = R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha][^{\mu'}{}_\mu]\, t_{i\mu'}^{\alpha'},\ \forall g \in \mathrm{G}.$$

[15] **Referenz hierzu: [17], §98, 99 oder auch [11], Appendix III.**

Wir zeigen nun, daß die Matrizen R_i diagonal sind in den Basisindizes μ' und μ. Das liegt daran, daß in allen T_i^α zu festem i *dieselbe* irreduzible Matrixdarstellung D_i von B_f wirkt. Für $g \in \mathrm{G}$ und $x \in B_f$ ist nämlich

$$\begin{aligned} x.g.t^\alpha_{i\mu} = \quad & x.(R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha][^{\mu'}{}_\mu]\, t^{\alpha'}_{i\mu'}) && = D_i(x)^{\mu''}{}_{\mu'} R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha][^{\mu'}{}_\mu]\, t^{\alpha'}_{i\mu''} \\ g.x.t^\alpha_{i\mu} = \quad & g.(D_i(x)^{\mu'}{}_\mu\, t^\alpha_{i\mu'}) && = R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha][^{\mu''}{}_{\mu'}]\, D_i(x)^{\mu'}{}_{\mu'}\, t^{\alpha'}_{i\mu''}. \end{aligned}$$

Die Produkte (in den Basisindizes) der Matrizen auf der rechten Seite dieser Gleichungen müssen übereinstimmen, da x und g nach Voraussetzung kommutieren, das heißt, es gilt die Matrixgleichung

$$R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha]\, D_i(x) = D_i(x)\, R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha].$$

Für festes g gilt sie für alle x. Da die Matrizen D_i irreduzibel sind, folgt damit aus Schurs Lemma, daß R_i proportional zur Einheitsmatrix in den Basisindizes der T_i^α sein muß:

$$R_i(g)[_{\alpha'}{}^\alpha][^{\mu'}{}_\mu] = R_i(g)_{\alpha'}{}^\alpha\, \delta^{\mu'}{}_\mu.$$

Mit diesen Ergebnissen können wir nun sofort invariante Unterräume für A_f angeben. Wir konstruieren einfach für jedes feste μ den Raum

$$V_i^\mu \equiv \mathrm{lin}\{t^\alpha_{i\mu} | \alpha\}.$$

Insgesamt findet man

Satz 8 *Die Räume V_i^μ sind invariante Unterräume der Darstellung $R^{\times f}$ von G in $V^{\otimes f}$. Darüberhinaus sind die Darstellungen R_i von G in V_i^μ irreduzibel.*

Der Beweis dafür, daß die V_i^μ tatsächlich auch irreduzibel sind, beruht grob gesprochen darauf, daß A_f die *größte* Algebra ist, die mit B_f auf diesen Unterräumen kommutiert. Ihre Wirkung in den V_i^μ muß deshalb in gewissem Sinne „vollständig“ sein und kann nicht weiter ausreduziert werden.

Man beachte die duale Rolle die die Räume V_i^μ und T_i^α spielen. Die Dimension des einen gibt jeweils die Multiplizität des anderen im Tensorproduktraum an. Tatsächlich sind die V_i^μ isomorph zu (verallgemeinerten) Multiplizitätsmoduln der Darstellung i in $V^{\otimes f}$ im Sinne des letzten Abschnitts. Bezeichnen wir nämlich die Dimensionen der Darstellungen D_i bzw. R_i mit n_i bzw. α_i, so sind ja die jeweiligen Darstellungsräume isomorphe Kopien *generischer* $\mathbb{C}$–Vektorräume der gleichen Dimensionen, d.h.

$$\begin{aligned} T_i^\alpha \cong T_i \equiv \mathbb{C}^{n_i}, \qquad & \alpha = 1, \ldots, \alpha_i, \text{ bzw.} \\ V_i^\mu \cong v_i \equiv \mathbb{C}^{\alpha_i}, \qquad & \mu = 1, \ldots, n_i. \end{aligned}$$

V_i ist dann Multiplizitätsmodul für die Darstellung D_i von B_f in $V^{\otimes f}$, und umgekehrt ist T_i Multiplizitätsmodul für R_i. In Analogie zu (16) gilt

$$V_i \cong \mathrm{Hom}(T_i, V^{\otimes f}), \quad T_i \cong \mathrm{Hom}(V_i, V^{\otimes f}). \tag{21}$$

Die Tatsache, daß vom irreduziblen i–Modul genau so viele Kopien in $V^{\otimes f}$ vorkommen, wie die Dimension des zugehörigen Multiplizitätsmoduls angibt, kann man fassen, indem man den gesamten i–Untermodul in $V^{\otimes f}$ als Tensorprodukt $V_i \otimes T_i$ schreibt. Der ganze Modul $V^{\otimes f}$ zerfällt dann so:

$$V^{\otimes f} \cong \bigoplus_i V_i \otimes T_i. \tag{22}$$

Wie wir gesehen haben, wirken die Darstellungen D_i, R_i diagonal auf ihren jeweiligen Multiplizitätsmoduln, das heißt, sie zerfallen genauso in

$$D \equiv \bigoplus_i \mathrm{id}_{V_i} \otimes D_i \quad \text{und} \quad R^{\times f} = \bigoplus_i R_i \otimes \mathrm{id}_{T_i},$$

wobei D nur die ursprüngliche Operation von B_f auf $V^{\otimes f}$ meint.

Aufgabe: Wähle Basen in V_i, T_i und beschreibe den Isomorphismus (22) explizit. Beweise (21).

Der Klarheit halber seien nun noch einmal die Äquivalenzen aufgelistet, die wir oben diskutiert haben.

Satz 9 *Es gilt*

$$\begin{array}{ccccccc} B_f \text{ ist halbeinfach} & \Longleftrightarrow & B_f \text{ ist vollständig reduzibel} & \Longleftrightarrow & A_f \text{ ist vollständig reduzibel} & \Longleftrightarrow & A_f \text{ ist halbeinfach} \\ & & & & \Updownarrow & & \\ & & & & R^{\times f}(\mathrm{G}) \text{ ist vollständig reduzibel} & & \end{array}$$

Die Zerlegung (22) taucht auch in der Theorie der von Neumann Algebren auf und rangiert dort unter dem Stichwort *Faktorzerlegung*[16]. Man sieht an dieser Stelle, wie wichtig die Brauersche Strategie bei unendlichdimensionalen Algebren wird.

Die wichtigste Anwendung dieser Sache findet sich in der algebraischen Formulierung der Quantenfeldtheorie[17]. Grundlage der mathematischen Beschreibung ist hier der physikalische Hilbertraum $\mathscr{H}$, den man sich aus einem Vakuumvektor Ω erzeugt denkt durch eine von Neumann Algebra $\mathfrak{F}$, die *Feldalgebra* der Theorie: $\mathscr{H} = \overline{\mathfrak{F}\Omega}$. Normalerweise wird diese Beschreibung redundant sein, das heißt, nicht alle Vektoren (genauer *Strahlen*) in $\mathscr{H}$ entsprechen wirklich unterschiedlichen physikalischen Zuständen. Diese Redundanz formuliert man üblicherweise, indem man sagt, es gebe eine *Eichgruppe* $\mathfrak{G}$ von unitären Operatoren auf $\mathscr{H}$ und dann die *Observablen* der Theorie als diejenigen Operatoren in $\mathfrak{F}$ identifiziert, die invariant unter der Wirkung $F \mapsto UFU^{-1}$, $F \in \mathfrak{F}$, $U \in \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ bleiben, was nichts anderes heißt als $\mathfrak{A} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}'$. Die Observablen als *eichinvariante Größen* sind also als *relative Kommutante* der Eichgruppe in der Feldalgebra definiert. Es bietet sich dann an, die invarianten, irreduziblen Unterräume von $\mathscr{H}$ für $\mathfrak{A}$, die sogenannten *superselection–Sektoren*, nach obigem Schema durch die Menge Σ der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in $\mathscr{H}$ zu klassifizieren. Es zeigt sich, daß $\mathscr{H}$ so zerfällt, wie man es erwartet, nämlich in

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{H}_\sigma \otimes \mathscr{H}'_\sigma,$$

wobei $\mathscr{H}_\sigma$ der Darstellungsraum zu $\sigma \in \Sigma$ von $\mathfrak{G}$ ist. Die Eichgruppe wirkt dann durch

$$U = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{H}'_\sigma}, \quad \forall U \in \mathfrak{G}$$

auf $\mathscr{H}$, und die $\mathscr{H}'_\sigma$ sind die superselection–Sektoren der Theorie.

Der Fall, in dem die Brauer–Weyl–Theorie am wirkungsvollsten eingesetzt werden kann, ist der der vollen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(m)$ in $V^{\otimes f}$, $\dim(V) = m$. Die $\mathrm{GL}(m)$ ist so „groß“, daß nur

[16] **Eine intuitive, wenn auch nicht ganz elementare Einführung bietet [18], Kap. 2.**

[17] **Wen dieses Gebiet interessiert, der sei auf die schon zum Klassiker gewordene Monographie [7] verwiesen. Zur Sektorzerlegung des physikalischen Hilbertraums siehe auch [19], Kap. I.**

sehr wenig mit ihr kommutiert. Tatsächlich sind die einzigen Transformationen eines allgemeinen Tensors f–ter Stufe $x_{\mu_1\cdots\mu_f}$, die dies tun, Linearkombinationen von *Permutationen*

$$p:\ x_{\mu_1\cdots\mu_f} \longmapsto x_{\mu_{p(1)}\cdots\mu_{p(f)}}, \quad p \in S_f$$

der Tensorindizes. B_f ist hier also im wesentlichen die Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe S_f. Deren Darstellungstheorie ist aber sehr gut bekannt: Als endliche Gruppe ist ihre Darstellung in $V^{\otimes f}$ vollständig reduzibel. Der Darstellungsraum zerfällt in Symmetrieklassen von Tensoren, abgezählt durch die verschiedenen Young–Tableaux[18]. Damit kennt man die irreduziblen Unterräume bezüglich $\mathrm{GL}(m)$ ganz konkret.

Ist G die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ oder die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2m)$, so sind die zugehörigen $B_f(\mathrm{G})$'s halbeinfache Quotienten der *Brauer–Algebren* $D_f(n)$ beziehungsweise $D_f(-2m)$. Die Brauer Algebra D_f ist eine durch Graphen mit $2f$ Knoten definierte Algebra über dem Körper $\mathbb{C}(x)$ der rationalen Funktionen in einer Variablen x. Ersetzt man jedes Auftreten von x durch die Zahl n, so erhält man daraus die $\mathbb{C}$–Algebra $D_f(n)$. Die Brauerschen Algebren sind enge Verwandte der *Hecke–* und *Birman–Wenzl–Algebren*. Sie enthalten alle ein homomorphes Bild der *Zopfgruppe* $\mathscr{B}_f$ von f Strängen[19]. Daß man bei der Suche nach Invarianten der Operation irgendeiner Symmetriegruppe, Algebra oder *Quantengruppe* auf einem f–fachen Tensorprodukt immer wieder auf die Zopfgruppe stößt, ist keineswegs ein Zufall. Die Zopfung oder — wie oben im Fall der $\mathrm{GL}(m)$, wo die S_f auftaucht — ein „entartetes" homomorphes Abbild der Zopfung ist die allgemeinste Operation, die die f–komponentige Tensorstruktur des Darstellungsraums erhält. In der Physik, speziell in der oben angedeuteten algebraischen Quantenfeldtheorie entdeckte man diese Struktur unter dem Begriff *Zopfgruppenstatistik* wieder[20]. Diese ist eine Verallgemeinerung der üblichen *Permutationsgruppen–*, d.h. *Bose–* oder *Fermistatistik*, die im Prinzip beschreibt, was bei der Vertauschung von f identischen Teilchen passiert.

[18] Siehe [11], Abschn. 3.4, 3.5 und Kap. 5.

[19] Die Brauer–Algebren sind schön erklärt in [20] und auch in [21]. Die weitreichenden Zusammenhänge zu Hecke– und Birman–Wenzl–Algebren und Quantengruppen sind in der ausgezeichnet lesbaren Arbeit [22] dargestellt. Einführendes zur Zopfgruppe findet sich in [23].

[20] Für Interessierte: [12], [7], [19].

Literaturverzeichnis

[1] Joachim Hilgert und Karl-Hermann Neeb. *Lie–Gruppen und Lie–Algebren*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1991.

[2] Jürgen Fuchs. *Affine Lie Algebras And Quantum Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.

[3] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[4] Wolfgang Hein. *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[5] B. L. van der Waerden. *Group Theory and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[6] L. C. Biedenharn und J. D. Louck. *Angular Momentum in Quantum Physics*, Band 8 der Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

[7] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[8] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, und I. T. Todorov. *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[9] L. C. Biedenharn und J. D. Louck. *The Racah–Wigner Algeba in Quantum Theory*, Band 9 der Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

[10] V. S. Varadarajan. *Quantum Theory of Covariant Systems*, Band II der Reihe *Geometry of Quantum Theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Toronto, London, Melbourne, 1970.

[11] Wu-Ki Tung. *Group Theory In Physics*. World Scientific, Singapore, London, Hong Kong, 1985.

[12] V. G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and* 3*–Manifolds*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.

[13] Geoffrey E. Stedman. *Diagram Techniques in Group Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[14] Gerard J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, London, San Diego, 1990.

[15] Richard Brauer. On Algebras Which Are Connected With The Semisimple Continuous Groups. *Annals of Mathematics*, 38(4):857–872, 1937.

[16] Hermann Weyl. *The Classical Groups*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1939.

[17] B. L. van der Waerden. *Algebra I & II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[18] William Arveson. *An Invitation to C*-Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[19] Andreas U. Schmidt. Algebraische und Konforme Quantenfeldtheorie. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 1994.

[20] Hans Wenzl. On The Structure of Brauer's Centralizer Algebras. *Annals of Mathematics*, 128:173–193, 1988.

[21] Phil Hanlon und David Wales. On The Decomposition Of Brauer's Centralizer Algebras. *Journal of Algebra*, 121:409–445, 1989.

[22] Hans Wenzl. Quantum Groups and Subfactors of Type B, C, and D. *Communications in Mathematical Physics*, 133:383–432, 1990.

[23] Louis H. Kaufmann. *Knots And Physics*. World Scientific, Singapore, London, Hong Kong, 1991.